次は，本格的な問題です．

【大小比較①】

例題 3

$Lv.$(1)☆☆　(2)☆☆☆★★

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える．

(1)　関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ．

(2)　数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ．

（東工大'19　5）

先の例題さえ経験していれば，何とかなるはずです．

解答

(1)　$x>0$ を前提とする．

$$\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}'=\left\{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}'$$
$$=\{\log(x+1)-\log x\}'$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(x+1)}$$

より

$$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\cdot\left\{-\frac{1}{x(x+1)}\right\}$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x},$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{-x+(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0.$$

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ から $f'(x)<0$. 終

(2)　$b_k<b_{k+1}$ を変形すると

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}<\frac{(k+2)^{k+2}}{a^k(k+1)!}$$
$$a<\frac{(k+2)^{k+2}}{(k+1)^{k+2}}$$
$$a<\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+2}$$
$$\log a<(k+2)\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right).$$

（両辺>0 より）

また

$$\log a=4\log\frac{4}{3}=(3+1)\log\left(1+\frac{1}{3}\right)=f(3)$$

であり，(1) より $f(x)$ は $x>0$ で単調減少であるから

$$b_k<b_{k+1}\iff f(3)<f(k+1)$$
$$\iff k+1<3$$
$$\iff k<2$$

よって b_k と b_{k+1} の大小は，k と 2 の大小に一致するので

《　$b_k<b_{k+1}\iff k=1$

$b_k=b_{k+1}\iff k=2$

$b_k>b_{k+1}\iff k\geqq 3$　ゆえ》

$$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots$$

であるから，$b_k=M$ となるのは $k=2,\ 3$. 答

また

$$M=b_2$$
$$=\frac{3^3}{a^2\cdot 2!}=\frac{3^8}{2^{16}}\cdot\frac{3^3}{2}=\frac{3^{11}}{2^{17}}=\frac{177147}{131072}$$ 答

さらにもう1問.

【大小比較②】

例題 $\boxed{4}$

Lv.☆☆☆★★★

2つの数 $(0.99)^{99}$ と $(1.01)^{-101}$ との大小を比較せよ.

（名古屋大'80）

いろいろな解法が楽しめます.

解答

$A=(0.99)^{99}$, $B(1.01)^{-101}$ とする.

$A>B$ を変形すると

$$99\log\frac{99}{100}>-101\log\frac{101}{100}\quad（両辺正より）$$

$$99\log 99-99\log 100>-101(\log 101-\log 100)$$

$$99\log 99+101\log 101>200\log 100.$$

ここで $a=99$, $b=101$ とすると

$$100=\frac{a+b}{2},\ 200=2\cdot\frac{a+b}{2}$$

であり，さらに $f(x)=x\log x$（$x>0$）とすると

$$A>B$$

$$\Leftrightarrow a\log a+b\log b>2\cdot\frac{a+b}{2}\log\frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(a)+f(b)>2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

ゆえに A と B の大小は，$\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ と $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ の大小に一致する.

$$f'(x)=\log x+1,\ f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

より，$f(x)$ は下に凸であるから

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right)\quad つまり\quad A>B.$$ 答

参考

$(0.99)^{99}=0.3697\cdots$, $(1.01)^{-101}=0.3660\cdots$ と僅差です.

別解

$A=(0.99)^{99}$, $B(1.01)^{-101}$ とする.

$A>B$ を変形すると

$$99\log 0.99>-101\log 1.01\quad（両辺正より）$$

$$0.99\log 0.99+1.01\log 1.01>0.$$

ここで $a=0.99$, $b=1.01$ とし，

さらに $f(x)=x\log x$（$x>0$）とすると

$$A>B\Leftrightarrow\frac{f(a)+f(b)}{2}>0$$

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$ に留意し

$$A>B\Leftrightarrow\frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

以下略. 答

別解

$A=(0.99)^{99}$, $B(1.01)^{-101}$ とする.

$A>B$ を変形すると

$$99\log 0.99>-101\log 1.01$$

$$0.99\log 0.99+1.01\log 1.01>0.$$

ここで

$$f(x)=(1-x)\log(1-x)+(1+x)\log(1+x)$$

（$0<x<1$）

とすると

$$A>B\Leftrightarrow f(0.01)>0$$

ゆえに A と B の大小は，$f(0.01)$ と 0 の大小に一致する.

$$f'(x)$$

$$=(-1)\log(1-x)+(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}$$

$$+\log(1+x)+(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$=\log(1+x)-\log(1-x)>0.$$

（$1+x>1-x$ より）

これと $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ より，$f(x)$ の増減は以下：

x	(0)	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	

よって

$$f(0.01)>0\quad つまり\quad A>B.$$ 答