※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

問題一覧

1

実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x}dx$ の整数部分を求めよ．

2

方程式

$$(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

3

実数が書かれた 3 枚のカード $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{\sqrt{3}}$ から，無作為に 2 枚のカードを順に選び，出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える．正の整数 n に対して，この操作を n 回繰り返して得られる n 個の複素数の積を z_n で表す．

(1)　$|z_n|<5$ となる確率 P_n を求めよ．

(2)　$z_n{}^2$ が実数となる確率 Q_n を求めよ．

4

xyz 空間において，x 軸を軸とする半径 2 の円柱から，$|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする．また，A を x 軸のまわりに 45° 回転してから z 軸のまわりに 90° 回転したものを B とする．A と B の共通部分の体積を求めよ．

5

xyz 空間の 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ 1,\ -1)$，D$(-1,\ 0,\ 0)$ を考える．

(1)　2 直線 AB，BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ．

(2)　4 直線 AB，BC，CD，DA に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ．

→解答例は 2 ページから．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

1

実数 $\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx$ の整数部分を求めよ．

【難易度】

難

【講評】

結果の予想は簡単に立つが，$\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx>1$ を示すのは一筋縄ではいかない．完答するには類題経験と高い実力が必要．

【解答例】

$x\geqq 0$ のとき $0<e^x\leqq x+e^x$ が成り立つので

$$\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx\leqq\int_0^{2023}\frac{2}{e^x}dx$$
$$=\Big[-2e^{-x}\Big]_0^{2023}$$
$$=2-2e^{-2023}<2. \qquad \cdots\cdots(*)$$

また $f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}$ $(x\geqq 0)$ とすると

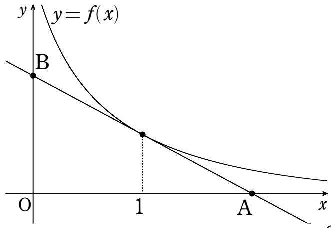
$$f'(x)=\frac{-2(1+e^x)}{(x+e^x)^2}<0,$$

$$f''(x)$$
$$=(-2)\cdot\frac{e^x(x+e^x)^2-(1+e^x)\cdot 2(x+e^x)\cdot(1+e^x)}{(x+e^x)^4}$$
$$=\frac{-2}{(x+e^x)^3}\{e^x(x+e^x)-2(1+e^x)^2\}$$
$$=\frac{2e^x}{(x+e^x)^3}\{e^x(e^x-x)+4e^x+2\}.$$

$y=e^x$ と $y=x+1$ は $x=0$ で接し，$y=e^x$ は下に凸であるから，$e^x\geqq x+1$ が成り立つので $e^x>x$．
よって $f''(x)>0$ ゆえ $y=f(x)$ は下に凸．
$y=f(x)$ の $x=1$ における接線の方程式は

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=\frac{-2(1+e)}{(1+e)^2}(x-1)+\frac{2}{1+e}$$
$$=\frac{-2}{1+e}x+\frac{4}{1+e}.$$

この接線は A$(2,\ 0)$，B$\left(0,\ \dfrac{4}{1+e}\right)$，を通る．



上の図より

$$\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx>\triangle\mathrm{OAB}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{1+e}$$
$$=\frac{4}{1+e}>\frac{4}{1+3}=1.$$

よって求める整数部分は 1 答

【別解１】
【解答例】の $(*)$ まで同じ．
次に，$x\geqq 0$ を満たす任意の x に対して

$$ae^x\geqq x \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つような正の数 a を考える．

$$① \Longleftrightarrow a\geqq xe^{-x}$$

から $f(x)=xe^{-x}$ $(x\geqq 0)$ とすると

$$f'(x)=e^{-x}(-x+1)$$

より，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	(∞)

ゆえ，$x\geqq 0$ を満たす任意の x に対して $\dfrac{1}{e}\geqq f(x)$

つまり $e^{x-1}\geqq x$ が成り立つので

$$\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx\geqq\int_0^{2023}\frac{2}{e^{x-1}+e^x}dx$$
$$=\frac{1}{e^{-1}+1}\int_0^{2023}\frac{2}{e^x}dx$$
$$=\frac{1}{e^{-1}+1}(2-2e^{-2023}).$$

ここで

$$e^{-1}=\frac{1}{e}<\frac{1}{2},$$

$$0<e^{-2023}<e^{-4}<\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$$

から

$$\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx>\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(2-2\cdot\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 1.8=1.2>1$$

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

よって求める整数部分は 1　答

【別解２】
【解答例】の $(*)$ まで同じ．
次に，$x \geqq 0$ において

$$\frac{2}{x+e^x} \geqq -\frac{1}{2}x+1 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示す．

①

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x+e^x} \geqq -x+2$$

$$\Leftrightarrow 4 \geqq (x+e^x)(-x+2) \quad (\,x+e^x>0 \text{ より}\,)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+(x-2)e^x+4 \geqq 0$$

より，$f(x)=x^2-2x+(x-2)e^x+4\ (x \geqq 0)$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x-2+e^x+(x-2)e^x \\ &= 2(x-1)+(x-1)e^x \\ &= (x-1)(e^x+2) \end{aligned}$$

より，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$		$\nearrow$

であり，

$$f(1)=1-2-e+4=3-e>0$$

から $x \geqq 1$ で ① は成り立つので

$$\begin{aligned} \int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx &\geqq \int_0^2 \frac{2}{x+e^x}dx \\ &\geqq \int_0^2\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{4}+x\right]_0^2=1 \end{aligned}$$

ゆえ求める整数部分は 1　答

【別解３】
【解答例】の $(*)$ まで同じ．
また $f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}\ (x \geqq 0)$ とすると，これは単調減少であるから

$$\int_0^{2023} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx+\int_1^{2023} f(x)dx$$

$$>\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(1)dx+\int_1^{2023} f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right\}+\int_1^{2023} f(x)dx. \quad \cdots\cdots ①$$

$e=2.7\cdots$ であることから，$1.6^2<e<1.7^2$ より

$\sqrt{e}=1.6\cdots$ がいえるので

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}+\sqrt{e}}>\frac{2}{0.5+1.7}=\frac{2}{2.2}=0.90\cdots,$$

$$f(1)=\frac{2}{1+e}>\frac{2}{1+2.8}=\frac{2}{3.8}=0.52\cdots$$

から

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)>0.90+0.52=1.44$$

$$\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right\}>0.72 \quad \cdots\cdots ②$$

また，$y=e^x$ と $y=x+1$ は $x=0$ で接し，$y=e^x$ は下に凸であるから，$e^x \geqq x+1$ が成り立つので
$e^x>x$ がいえるので

$$\begin{aligned} \int_1^{2023} f(x)dx &> \int_1^{2023}\frac{2}{e^x+e^x}dx \\ &= \int_1^{2023} e^{-x}dx \\ &= \left[-e^{-x}\right]_1^{2023}=\frac{1}{e}-e^{-2023}. \end{aligned}$$

ここで $10<e^3$ より $1000<e^9<e^{2003}$ ゆえ

$$0<e^{-2003}<\frac{1}{1000}.$$

また $\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{2.8}=0.35\cdots$ ゆえ

$$\int_1^{2023} f(x)dx>0.35-\frac{1}{1000}>0.34 \quad \cdots\cdots ③$$

① ～ ③ より

$$\int_0^{2023} f(x)dx>0.72+0.34>1$$

よって求める整数部分は 1　答

【配点例】(60点)

(ア)　$\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx<2$ に $\boxed{20\text{ 点}}$．

(イ)　$\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx>1$ に $\boxed{40\text{ 点}}$．

参考

「問題文で与えられていない $e=2.7\cdots$ を勝手に使っていいのか」と考える人が多いかもしれないが，過去にも東工大では．与えられてない「$\pi=3.1\cdots$」を使わないと解けない出題例がある (2010 年の前期 1 番)．

2

方程式

$$(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

【難易度】

標準

【講評】

いろいろな解法が考えられる．連続 3 整数の積が 6 の倍数であることを利用すると，作業量が減る．

【解答例】

x は整数であり，$x^3-x=(x-1)x(x+1)$ から，これは 3 つの連続する整数の積であるから，

$$x^3-x=6f(x) \quad \text{つまり} \quad f(x)=\frac{x^3-x}{6}$$

と定義すると $f(x)$ は整数である．

$(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ を変形すると

$$\{6f(x)\}^2\cdot 6f(y)=2^7\cdot 3^3\cdot 5^2$$

$$\{f(x)\}^2\cdot f(y)=2^4\cdot 5^2. \qquad \cdots\cdots ①$$

これより $f(y)>0$ つまり $y>0$ が必要．

また $f(x)$ は奇関数であり，$\{f(x)\}^2$ は偶関数であるから，まずは $x\geqq 0$ のみ調べる．

① より

$$f(x)=2^0\cdot 5^0,\ 2^1\cdot 5^0,\ 2^2\cdot 5^0,\ 2^0\cdot 5^1,\ 2^1\cdot 5^1,\ 2^2\cdot 5^1$$

$$=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20 \qquad \cdots\cdots ②$$

のみが考えられる．

また

x	0	1	2	3	4	5	6, 7, 8
$f(x)$	0	0	1	4	10	20	7 の倍数

x	9	10, 11, 12	13	14
$f(x)$	120	11 の倍数	13 の倍数	455

であり，$x\geqq 1$ で $f(x)$ は単調増加する．　(*)

よって，② のうち考えられるのは

$$f(x)=1,\ 4,\ 10,\ 20$$

の場合のみ．

以下，(*) に留意する．

(ア)　$f(x)=1$ のとき，① より

$$f(y)=2^4\cdot 5^2=400.$$

これを満たす y は存在しない．

(イ)　$f(x)=4$ のとき，① より

$$f(y)=25.$$

これを満たす y は存在しない．

(ウ)　$f(x)=10$ つまり $x=4$ のとき，① より

$f(y)=4$ つまり $y=3$.

(エ)　$f(x)=20$ つまり $x=5$ のとき，① より

$f(y)=1$ つまり $y=2$.

以上より，$x\leqq 0$ も考え

$$(x,\ y)=(4,\ 3),\ (-4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (-5,\ 2)$$ 答

【配点例】(60点)

(ア)　$(x,\ y)=(4,\ 3),\ (-4,\ 3)$ に $\boxed{20点}$.

※ $(x,\ y)=(4,\ 3)$ のみは $\boxed{15点}$.

(イ)　$(x,\ y)=(5,\ 2),\ (-5,\ 2)$ に $\boxed{20点}$.

※ $(x,\ y)=(4,\ 3)$ のみは $\boxed{15点}$.

(ウ)　解が (ア) (イ) 以外に存在しないことを示すのに $\boxed{20点}$.

※ 素因数分解から x^3-x のパターンが有限個であることや，x^3-x の単調性から x が大きくなれないことなどに触れていれば OK.

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$\boxed{3}$

実数が書かれた 3 枚のカード $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{\sqrt{3}}$ から，無作為に 2 枚のカードを順に選び，出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える．正の整数 n に対して，この操作を n 回繰り返して得られる n 個の複素数の積を z_n で表す．

(1)　$|z_n|<5$ となる確率 P_n を求めよ．

(2)　$z_n{}^2$ が実数となる確率 Q_n を求めよ．

【難易度】

(1)　やや易　　(2)　標準

【講評】

(1) は，複素数の大きさに着目すれば，いわゆる反復試行の問題になる．(2) は，$z_n{}^2$ が実数になるための条件を求めるのが第一段階．次の段階では，類題経験があるとかなり有利．

【解答例】

事象 A，B に対し，事象 A の起こる確率を $P(A)$，事象 A が起こったという条件のもと B が起こる条件つき確率を $P_A(B)$ と表す．

(1)　k 回目 $(1\leqq k\leqq n)$ に出る複素数を w_k とする．w_k の候補は以下の 6 種類．

複素数	大きさ	偏角
$0+1i$	1	$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{6}\pi$
$0+\sqrt{3}\,i$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{6}\pi$
$1+0i$	1	0
$1+\sqrt{3}\,i$	2	$\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{6}\pi$
$\sqrt{3}+0i$	$\sqrt{3}$	0
$\sqrt{3}+1i$	2	$\dfrac{1}{6}\pi$

これらの出る確率は等しいので，

$|w_k|=1$ となる事象を A_k，

$|w_k|=\sqrt{3}$ となる事象を B_k，

$|w_k|=2$ となる事象を C_k

とすると

$$P(A_k)=P(B_k)=P(C_k)=\frac{1}{3}.$$

$|z_n|<5$ となる場合の，A_k，B_k，C_k の起きる回数は，次の表のようになる．ただし，$n\geqq 2$ とする．

C_k	B_k	A_k
0	0	n
0	1	$n-1$
0	2	$n-2$
1	0	$n-1$
1	1	$n-2$
2	0	$n-2$

よって

$$P_n=\frac{1+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1+n(n-1)+{}_n\mathrm{C}_2}{3^n}$$

$$=\frac{1+2n+2n(n-1)}{3^n}=\frac{2n^2+1}{3^n}$$

$n=1$ のときも，これは成り立つ．㊟

(2)　(1) より

$$\arg z_n=\frac{\pi}{6}a_n$$

なる整数 a_n が存在する．

また，$z_n\neq 0$ より

$z_n{}^2$ が実数である

$\Longleftrightarrow \arg(z_n{}^2)$ は π の整数倍である

$\Longleftrightarrow \arg z_n$ は $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である

$\Longleftrightarrow a_n$ は 3 の倍数である

から，a_n を 3 で割った余りを b_n とすると

$z_n{}^2$ が実数である $\Longleftrightarrow b_n=0$.

よって

$$Q_n=P(b_n=0)$$

であり，さらに

$$R_n=P(b_n=1),\ S_n=P(b_n=2)$$

と定義する．

$$P_{b_n=0}(b_{n+1}=0)=P\left(\arg w_{n+1}=0,\ \frac{3}{6}\pi\right)=\frac{2}{3},$$

$$P_{b_n=1}(b_{n+1}=0)=P\left(\arg w_{n+1}=\frac{2}{6}\pi\right)=\frac{1}{6},$$

$$P_{b_n=2}(b_{n+1}=0)=P\left(\arg w_{n+1}=\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{6}$$

から $Q_n+R_n+S_n=1$ に留意し

$$Q_{n+1}=\frac{2}{3}Q_n+\frac{1}{6}R_n+\frac{1}{6}S_n$$

$$=\frac{2}{3}Q_n+\frac{1}{6}(R_n+S_n)$$

$$=\frac{2}{3}Q_n+\frac{1}{6}(1-Q_n)$$

$$=\frac{1}{2}Q_n+\frac{1}{6}$$

$$Q_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(Q_n-\frac{1}{3}\right).$$

また $Q_1=\dfrac{2}{3}$ から

$$Q_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$Q_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$ 答

【配点例】（60点）

(1)(計 25 点)

（ア） A_k, B_k, C_k $(1\leqq k\leqq n)$ の起きる回数のパターンに $\boxed{15\text{点}}$.

※ 6 パターン中，5 パターン以上書き出せていれば $\boxed{10\text{点}}$．4 パターン以上で $\boxed{5\text{点}}$.

（イ） 結論に $\boxed{10\text{点}}$.

(2)(計 35 点)

（ウ） b_n に着目する方針に $\boxed{10\text{点}}$.

（エ） 正しい漸化式に $\boxed{15\text{点}}$.

（オ） 結論に $\boxed{10\text{点}}$.

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$\boxed{4}$

xyz 空間において，x 軸を軸とする半径 2 の円柱から，$|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする．また，A を x 軸のまわりに 45° 回転してから z 軸のまわりに 90° 回転したものを B とする．A と B の共通部分の体積を求めよ．

【難易度】

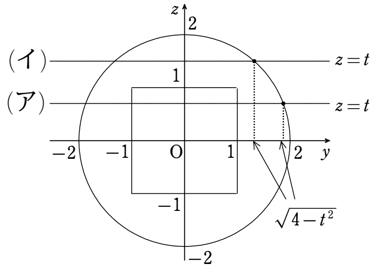
やや難

【講評】

東工大の立体図形としては，標準的な問題です．場合分けと積分計算を丁寧に行う必要があるので，50 分程度で完答したいところです．

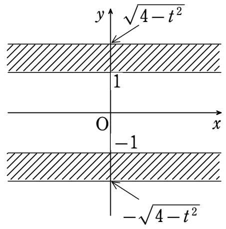
【解答例】

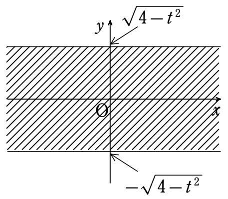
立体 A を x 軸方向から見た図形は以下のようになる．



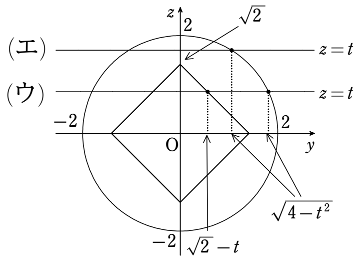
$z=t$ と A の交わりを α_t とすると，その概形は以下の通り．

(ア) $0\leqq t\leqq 1$ のとき　　(イ) $1\leqq t\leqq 2$ のとき



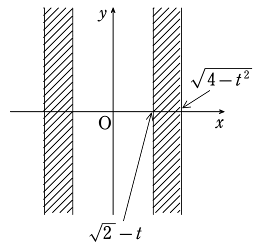


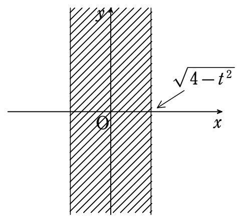
立体 B を y 軸方向から見た図形は以下のようになる．



$z=t$ と B の交わりを β_t とすると，その概形は以下の通り．

(ウ) $0\leqq t\leqq \sqrt{2}$ のとき　　(エ) $\sqrt{2}\leqq t\leqq 2$ のとき

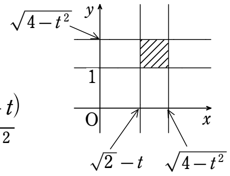




次に，α_t と β_t の共通部分の面積 $S(t)$ を求める．

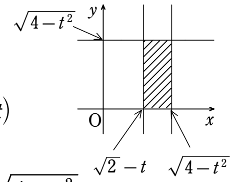
対称性より，$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ の部分のみ考える．

[1] $0\leqq t\leqq 1$ のとき



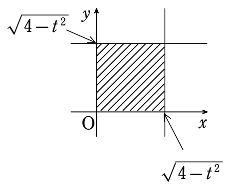
$$\begin{aligned}\frac{S(t)}{4}&=(\sqrt{4-t^2}-1)(\sqrt{4-t^2}-\sqrt{2}+t)\\&=4-t^2+(t-\sqrt{2}-1)\sqrt{4-t^2}\\&\quad-t+\sqrt{2}\\&=-t^2+4+\sqrt{2}-t+t\sqrt{4-t^2}-(\sqrt{2}+1)\sqrt{4-t^2}.\end{aligned}$$

[2] $1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ のとき



$$\begin{aligned}\frac{S(t)}{4}&=\sqrt{4-t^2}(\sqrt{4-t^2}-\sqrt{2}+t)\\&=4-t^2+(t-\sqrt{2})\sqrt{4-t^2}\\&=-t^2+4+t\sqrt{4-t^2}-\sqrt{2}\sqrt{4-t^2}.\end{aligned}$$

[3] $\sqrt{2}\leqq t\leqq 2$ のとき



$$\begin{aligned}\frac{S(t)}{4}&=(\sqrt{4-t^2})^2\\&=-t^2+4.\end{aligned}$$

求める体積を V とすると，対称性より

$$V=2\int_0^2 S(t)dt$$

から

$$\begin{aligned}\frac{V}{8}&=\int_0^1(-t^2+4+\sqrt{2}-t+t\sqrt{4-t^2}-(\sqrt{2}+1)\sqrt{4-t^2})dt\\&\quad+\int_1^{\sqrt{2}}(-t^2+4+t\sqrt{4-t^2}-\sqrt{2}\sqrt{4-t^2})dt\\&\quad+\int_{\sqrt{2}}^2(-t^2+4)dt\\&=\int_0^2(-t^2+4)dt+\int_0^1(\sqrt{2}-t)dt+\int_0^{\sqrt{2}}t\sqrt{4-t^2}\,dt\\&\quad-(\sqrt{2}+1)\int_0^1\sqrt{4-t^2}\,dt-\sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

ここで

$$\int_0^2(-t^2+4)dt=\left[-\frac{t^3}{3}+4t\right]_0^2=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3},$$

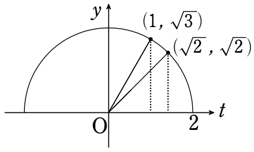
$$\int_0^1(\sqrt{2}-t)dt=\left[\sqrt{2}\,t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\sqrt{2}-\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}}t\sqrt{4-t^2}\,dt&=\left[-\frac{1}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}\\&=-\frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)\\&=-\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-8)\\&=\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

また右の図を参照し，

$$\arg(1+\sqrt{3}\,i)=\frac{\pi}{3},$$

$$\arg(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)=\frac{\pi}{4}$$



から

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{4-t^2}\,dt&=\frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\\&=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$$

$$=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって

$$\frac{V}{8}$$

$$\begin{aligned}=&\ \frac{16}{3}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\\&-(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\=&\ \frac{\pi}{6}(-2\sqrt{2}-2-\sqrt{2})+\left(\frac{16}{3}-\frac{1}{2}+\frac{8}{3}\right)\\&+\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{3}-1\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\\=&-\frac{\pi}{6}(3\sqrt{2}+2)+\frac{15}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

$$V=60-4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{2}+2)-\frac{16\sqrt{2}}{3}$$ 答

【配点例】(60点)

(ア)　各場合の $S(t)$ に $\boxed{10\text{点}\times 3}$.

(イ)　定積分の値に $\boxed{30\text{点}}$.

5

xyz 空間の 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 1)$，C$(-1,\ 1,\ -1)$，D$(-1,\ 0,\ 0)$ を考える．

(1)　2 直線 AB，BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ．

(2)　4 直線 AB，BC，CD，DA に共に接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ．

【難易度】

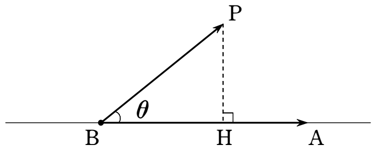
(1)　標準　　(2)　やや難

【講評】

(1) は経験があればなんとかなるだろう．(2) は，連立方程式を解くだけだが，この計算量を正確にさばくのは大変．普通の受験生は諦めている可能性が高い．

【解答例】

(1)



P$(x,\ y,\ z)$ とおく．

点 P と直線 AB の距離 $d_{\rm AB}$ を求める．

$\overrightarrow{\rm PA}$ と $\overrightarrow{\rm PB}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\begin{aligned} {d_{\rm AB}}^2 &= |\overrightarrow{\rm BP}|^2-(|\overrightarrow{\rm BP}|\cos\theta)^2 \\ &= |\overrightarrow{\rm BP}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{\rm BA}||\overrightarrow{\rm BP}|\cos\theta}{|\overrightarrow{\rm BA}|}\right)^2 \\ &= |\overrightarrow{\rm BP}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{\rm BA}\cdot\overrightarrow{\rm BP}}{|\overrightarrow{\rm BA}|}\right)^2 \\ &= |\overrightarrow{\rm BP}|^2-\frac{(\overrightarrow{\rm BA}\cdot\overrightarrow{\rm BP})^2}{|\overrightarrow{\rm BA}|^2}. \end{aligned}$$

同様に　${d_{\rm BC}}^2=|\overrightarrow{\rm BP}|^2-\dfrac{(\overrightarrow{\rm BC}\cdot\overrightarrow{\rm BP})^2}{|\overrightarrow{\rm BC}|^2}$

より，P が 2 直線 AB，BC から等距離にあるための条件は

$$|\overrightarrow{\rm BP}|^2-\frac{(\overrightarrow{\rm BA}\cdot\overrightarrow{\rm BP})^2}{|\overrightarrow{\rm BA}|^2}=|\overrightarrow{\rm BP}|^2-\frac{(\overrightarrow{\rm BC}\cdot\overrightarrow{\rm BP})^2}{|\overrightarrow{\rm BC}|^2}$$

$$\frac{(\overrightarrow{\rm BA}\cdot\overrightarrow{\rm BP})^2}{|\overrightarrow{\rm BA}|^2}=\frac{(\overrightarrow{\rm BC}\cdot\overrightarrow{\rm BP})^2}{|\overrightarrow{\rm BC}|^2}$$

$$\frac{\overrightarrow{\rm BA}\cdot\overrightarrow{\rm BP}}{|\overrightarrow{\rm BA}|}=\pm\frac{\overrightarrow{\rm BC}\cdot\overrightarrow{\rm BP}}{|\overrightarrow{\rm BC}|}$$

$$\left(\frac{\overrightarrow{\rm BA}}{|\overrightarrow{\rm BA}|}\pm\frac{\overrightarrow{\rm BC}}{|\overrightarrow{\rm BC}|}\right)\cdot\overrightarrow{\rm BP}=0$$

$$(|\overrightarrow{\rm BC}|\overrightarrow{\rm BA}\pm|\overrightarrow{\rm BA}|\overrightarrow{\rm BC})\cdot\overrightarrow{\rm BP}=0.$$

$\overrightarrow{\rm BA}=(0,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{\rm BC}=(-2,\ 0,\ -2)$，

$\overrightarrow{\rm BP}=(x-1,\ y-1,\ z-1)$

から

$$\begin{aligned} &|\overrightarrow{\rm BC}|\overrightarrow{\rm BA}\pm|\overrightarrow{\rm BA}|\overrightarrow{\rm BC} \\ &=2\sqrt{2}(0,\ -1,\ -1)\pm\sqrt{2}(-2,\ 0,\ -2) \\ &=(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ -4\sqrt{2}),\ (2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ 0) \\ &=-2\sqrt{2}(1,\ 1,\ 2),\ 2\sqrt{2}(1,\ -1,\ 0) \end{aligned}$$

より求める図形の方程式は

$1(x-1)+1(y-1)+2(z-1)=0$　または

$1(x-1)-1(y-1)=0$

つまり

$x+y+2z=4$　または　$x=y$　……①

から，求める図形は，

平面　$x+y+2z=4$，$x=y$　答

(2)　(1) と同様，${d_{\rm BC}}^2={d_{\rm CD}}^2$ となる図形の方程式は

$$(|\overrightarrow{\rm CD}|\overrightarrow{\rm CB}\pm|\overrightarrow{\rm CB}|\overrightarrow{\rm CD})\cdot\overrightarrow{\rm CP}=0$$

であり，

$\overrightarrow{\rm CB}=(2,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{\rm CD}=(0,\ -1,\ 1)$，

$\overrightarrow{\rm CP}=(x+1,\ y-1,\ z+1)$

から

$$\begin{aligned} &|\overrightarrow{\rm CD}|\overrightarrow{\rm CB}\pm|\overrightarrow{\rm CB}|\overrightarrow{\rm CD} \\ &=\sqrt{2}(2,\ 0,\ 2)\pm2\sqrt{2}(0,\ -1,\ 1) \\ &=(2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}),\ (2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 0) \\ &=2\sqrt{2}(1,\ -1,\ 2),\ 2\sqrt{2}(1,\ 1,\ 0) \end{aligned}$$

より

$1(x+1)-1(y-1)+2(z+1)=0$　または

$1(x+1)+1(y-1)=0$

つまり

$x-y+2z=-4$　または　$x=-y$　……②

さらに ${d_{\rm CD}}^2={d_{\rm DA}}^2$ となる図形の方程式は

$$(|\overrightarrow{\rm DA}|\overrightarrow{\rm DC}\pm|\overrightarrow{\rm DC}|\overrightarrow{\rm DA})\cdot\overrightarrow{\rm DP}=0$$

であり，

$\overrightarrow{\rm DC}=(0,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{\rm DA}=(2,\ 0,\ 0)$，

$\overrightarrow{\rm DP}=(x+1,\ y,\ z)$

から

$$\begin{aligned} &|\overrightarrow{\rm DA}|\overrightarrow{\rm DC}\pm|\overrightarrow{\rm DC}|\overrightarrow{\rm DA} \\ &=2(0,\ 1,\ -1)\pm\sqrt{2}(2,\ 0,\ 0) \\ &=(2\sqrt{2},\ 2,\ -2),\ (-2\sqrt{2},\ 2,\ -2) \\ &=2(\sqrt{2},\ 1,\ -1),\ 2(-\sqrt{2},\ 1,\ -1) \end{aligned}$$

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

より

$$\left.\begin{array}{ll} & \sqrt{2}(x+1)+y-z=0 \\ \text{または} & -\sqrt{2}(x+1)+y-z=0 \end{array}\right]③$$

球の中心の条件は ① かつ ② かつ ③ である．

(ア)　$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$ のとき

このとき

$$\begin{cases} y=4 \\ x+2z=0 \end{cases} \text{から} \begin{cases} y=4 \\ x=-2z \end{cases}$$

より，この下で ③ は

$$-\sqrt{2}(-2z+1)+4-z=0$$

または　$\sqrt{2}(-2z+1)+4-z=0$

より

$$(2\sqrt{2}-1)z=-4-\sqrt{2}$$

または　$(2\sqrt{2}+1)z=4+\sqrt{2}$

から，$z=\pm\sqrt{2}$．

よって球の中心は

$$(x,\ y,\ z)=(\mp 2\sqrt{2},\ 4,\ \pm\sqrt{2})\ (\text{複号同順})$$

であり，その半径 r は直線 AD が x 軸であることを考え

$$r=\sqrt{4^2+(\pm\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2} \quad \text{答}$$

(イ)　$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x=-y \end{cases}$ のとき

このとき　$\begin{cases} z=2 \\ x=-y \end{cases}$　より，この下で ③ は

$$-\sqrt{2}(-y+1)+y-2=0$$

または　$\sqrt{2}(-y+1)+y-2=0$

より

$$(\sqrt{2}+1)y=2+\sqrt{2}$$

または　$(\sqrt{2}-1)z=-2+\sqrt{2}$

から，$y=\pm\sqrt{2}$．

よって球の中心は

$$(x,\ y,\ z)=(\mp\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2},\ 2)\ (\text{複号同順})$$

であり，

$$r=\sqrt{(\pm\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6} \quad \text{答}$$

(ウ)　$\begin{cases} x=y \\ x-y+2z=-4 \end{cases}$ のとき

このとき　$\begin{cases} z=-2 \\ x=y \end{cases}$　より，この下で ③ は

$$-\sqrt{2}(y+1)+y+2=0$$

または　$\sqrt{2}(y+1)+y+2=0$

より

$$(\sqrt{2}-1)y=2-\sqrt{2}$$

または　$(\sqrt{2}+1)y=-2-\sqrt{2}$

から，$y=\pm\sqrt{2}$．

よって球の中心は

$$(x,\ y,\ z)=(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2},\ -2)\ (\text{複号同順})$$

であり，

$$r=\sqrt{(\pm\sqrt{2})^2+(-2)^2}=\sqrt{6} \quad \text{答}$$

(エ)　$\begin{cases} x=y \\ x=-y \end{cases}$ のとき

このとき　$x=y=0$　より，この下で ③ は

$-\sqrt{2}-z=0$　または　$\sqrt{2}-z=0$

より，$z=\pm\sqrt{2}$．

よって球の中心は

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ \pm\sqrt{2})$$

であり，

$$r=\sqrt{0^2+(\pm\sqrt{2})^2}=\sqrt{2} \quad \text{答}$$

【配点例】(60点)

(1)(計 15 点)

[1]　① に $\boxed{15\text{点}}$．

(2)(計 45 点)

[2]　② と ③ に $\boxed{5\text{点}}$．

[3]　正しい中心と半径の組に $\boxed{10\text{点}\times 4}$