※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

問題一覧

1

a，b を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする．
a，b が

$$|a|\leqq 1,\ |b|\leqq 1$$

を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

2

3 つの正の整数 a，b，c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数は 1 であることを示せ．

(2)　$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．

3

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする．

(a)　時刻 t での点 A，B の座標は，それぞれ A $(\sin t,\ 0)$，B $(0,\ \cos t)$ である．
(b)　点 P は第一象限内にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ．

(2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ．

(3)　xy 平面内において，連立不等式

$$x^2-x+y^2<0,\ x^2+y^2-y<0$$

により定まる領域を D とする．このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ．

→解答例は 3 ページから．

4

a は正の実数とする．複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \frac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\frac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　K が円となるための a の条件を求めよ．また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ．

(2)　a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．

5

a は $0<a\leqq\frac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，

$$f(x)=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-ax\right)$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　次の等式 (∗) を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ．

$$(*)\qquad \int_0^1 f(x)\,dx=1$$

(2)　$0\leqq b<c\leqq 1$ を満たす実数 b, c について，不等式

$$f(b)(c-b)\leqq\int_b^c f(x)\,dx\leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ．

(3)　次の試行を考える．

[試行]　n 個の数 1, 2, ……, n を出目とする，あるルーレットを k 回まわす．

この [試行] において，各 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし，

$$(**)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k}=\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

が成り立つとする．このとき，(1) の等式 (∗) が成り立つことを示せ．

(4)　(3) の [試行] において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし，$A_n=\lim_{k\to\infty}A_{n,k}$ とする．(∗∗) が成り立つとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ．

→解答例は 3 ページから．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

1

a, b を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする．
a, b が

$$|a|\leqq 1,\ |b|\leqq 1$$

を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

【難易度】

やや難

【講評】

z が虚数の場合は，過去問に類題が多いが，z が実数の場合は，類題を経験したことのない生徒がほとんどで，かなり苦労したと思われる．

【解答例】 ※ $\mathbb{R}$ は実数，$\mathbb{C}$ は複素数の集合を表す．

$$z^2+az+b=(z-\alpha)(z-\beta)$$

なる α, $\beta\in\mathbb{C}$ が存在し

$$a=-(\alpha+\beta),\ b=\alpha\beta \quad\cdots\cdots ①$$

を満たす．

[1]　α, β が虚数のとき

a, $b\in\mathbb{R}$ より $\beta=\overline{\alpha}$ であり

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\alpha-\overline{\alpha} \\ b=\alpha\overline{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\mathrm{Re}\,\alpha \\ b=|\alpha|^2 \end{cases}$$

よって，α の存在範囲を D とすると，$\alpha\in D$ となるための虚数 α の条件は

$$\begin{cases} a=-2\mathrm{Re}\,\alpha \\ b=|\alpha|^2 \\ |a|\leqq 1 \\ |b|\leqq 1 \end{cases} \quad\cdots\cdots ② \quad \text{なる } a,\ b\in\mathbb{R} \text{ が存在すること}$$

であり

$$② \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\mathrm{Re}\,\alpha \\ b=|\alpha|^2 \\ |-2\mathrm{Re}\,\alpha|\leqq 1 \\ |\alpha|^2\leqq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2\mathrm{Re}\,\alpha \\ b=|\alpha|^2 \\ |\mathrm{Re}\,\alpha|\leqq \dfrac{1}{2} \\ |\alpha|\leqq 1 \end{cases}$$

よって，$\alpha\in D$ となるには $\begin{cases} |\mathrm{Re}\,\alpha|\leqq \dfrac{1}{2} \\ |\alpha|\leqq 1 \end{cases}$ が必要で，

逆にこの下で $\begin{cases} a=-2\mathrm{Re}\,\alpha \\ b=|\alpha|^2 \end{cases}$ なる a, $b\in\mathbb{R}$ は存在するので

$$\alpha\in D \Leftrightarrow \begin{cases} |\mathrm{Re}\,\alpha|\leqq \dfrac{1}{2} \\ |\alpha|\leqq 1 \end{cases}$$

[2]　α, $\beta\in\mathbb{R}$ のとき

$(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲を E とすると，$(\alpha,\ \beta)\in E$ となるための α, $\beta\in\mathbb{R}$ の条件は

$$\begin{cases} a=-\alpha-\beta \\ b=\alpha\beta \\ |a|\leqq 1 \\ |b|\leqq 1 \end{cases} \quad\cdots\cdots ③ \quad \text{なる } a,\ b\in\mathbb{R} \text{ が存在すること}$$

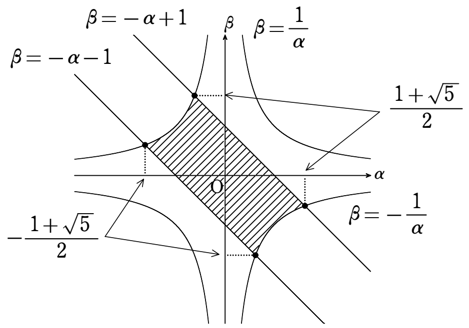
であり

$$③ \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\alpha-\beta \\ b=\alpha\beta \\ |\alpha+\beta|\leqq 1 \\ |\alpha\beta|\leqq 1 \end{cases}$$

よって，先ほどと同様に

$$(\alpha,\ \beta)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha+\beta|\leqq 1 \\ |\alpha\beta|\leqq 1 \end{cases}$$

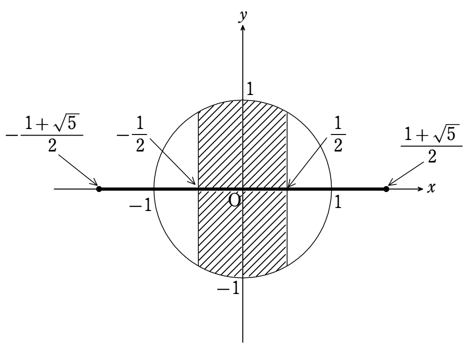
E を図示すると図の斜線部のようになる．



よって，α の値域は $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq\alpha\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．

β の値域も同様．

[1]，[2] より，z の存在範囲は以下の斜線部および太線．ただし，境界はすべて含み，●も含む．㊟



※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

【配点例】(60点)

※東工大の数学の配点は，例年 5 点刻みと予想される．
（なぜなら，数学の開示得点が常に 5 の倍数）．

(ア)　z が虚数のとき $|z|\leqq 1$ に $\boxed{10\text{点}}$．

(イ)　z が虚数のとき $|\mathrm{Re}\, z|\leqq \dfrac{1}{2}$ に $\boxed{10\text{点}}$．

(ウ)　z が実数のとき $|z|\leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ までに $\boxed{35\text{点}}$．
※ 議論の内容に応じて採点する．

(エ)　正しい領域の図示に $\boxed{5\text{点}}$．
※ 境界への言及がなくても減点しない．

【別解 1：解を a，b の関数として見る 】

[1]　は同じ．

[2]　α, $\beta\in\mathbb{R}$ のとき

$f(z)=z^2+az+b$

$a^2-4b\geqq 0$ の下で考える．$\alpha\leqq\beta$ とすると

$$\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

$$\beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

α, β は a, b の関数と見ると連続であり，
$a=b=0$ のとき $\alpha=\beta=0$．
さらに，$\beta=g(a,\ b)$ とすると

$$g(-a,\ b)=-\alpha$$

であるから，β の最大値を M とすると，
α の最小値は $-M$ である．
よって，$f(z)=0$ の実数解の値域は

$$-M\leqq z\leqq M.$$

β が最大になるのは $(a,\ b)=(-1,\ 1)$ のときであるから

$$M=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$ 以下略．

【別解 2：2 次関数の頂点の存在範囲を考える 】

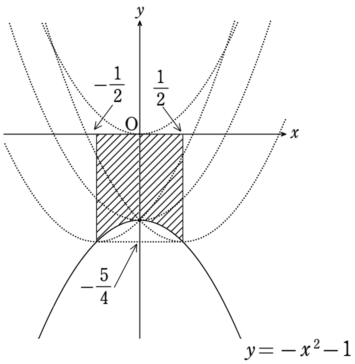
[1]　は同じ．

[2]　$x\in\mathbb{R}$ として，二次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える．$y=f(x)$ の頂点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right).$$

ここで $\begin{cases} X=-\dfrac{a}{2} \\ Y=-\dfrac{a^2}{4}+b \end{cases}$ 　つまり $\begin{cases} a=-2X \\ Y=-X^2+b \end{cases}$

とすると，X の値域は $-\dfrac{1}{2}\leqq X\leqq\dfrac{1}{2}$ であり，
X を固定し b を動かしたときの Y の値域は
$-X^2-1\leqq Y\leqq -X^2+1$ である．
以下，$f(x)=0$ が実数解を持つことを前提とすると，$Y\leqq 0$．
よって，P の存在範囲は以下の斜線部．
ただし境界を含む．



$f(x)=0$ の実数解 α, β について，$\alpha\leqq\beta$ とする．
a, b が動くときの β の最大値 M を考える．
このときは，P が第 4 象限にある場合を考えれば十分であり，P の x 座標が増えれば β は増加し，P の y 座標が減れば β は増加する．
よって，P が $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}\right)$ のとき β は最大値

$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ をとる．

さらに，上の図の対称性と，解の連続性を考えると，$f(z)=0$ の実数解の値域は

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq z\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$ 以下略．

【別解 3：解を x として a, b の存在を追求 ①】

[1]　は同じ．

[2]　$f(z)=0$ が実数解 x を持つとき

x の値域を I とすると，$x\in I$ となるための $x\in\mathbb{R}$ の条件は

$$\begin{cases} x^2+ax+b=0 \\ |a|\leqq 1 \\ |b|\leqq 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ④ \quad \text{なる } a,\ b\in\mathbb{R} \text{ が存在すること}$$

であり　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots(\sharp)$

$$④ \Leftrightarrow \begin{cases} b=-x^2-ax \\ |a|\leqq 1 \\ |-x^2-ax|\leqq 1 \end{cases}$$

よって，$x\in I$ となるには

$$\begin{cases} |a|\leqq 1 \\ |x^2+ax|\leqq 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑤ \quad \text{なる } a\in\mathbb{R} \text{ が存在すること}$$

が必要であり，逆にこの下で $b=-x^2-ax$ なる b が存在するので

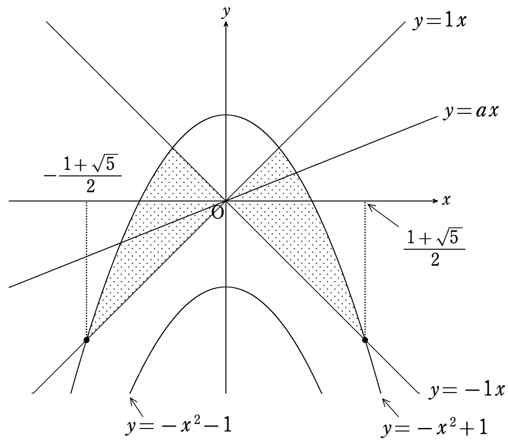
$x\in I \Leftrightarrow$ ⑤ なる $a\in\mathbb{R}$ が存在する

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots(*)$

$$⑤ \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqq a\leqq 1 \\ -1\leqq x^2+ax\leqq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqq a\leqq 1 \\ -x^2-1\leqq ax\leqq -x^2+1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑥$$

より，$-1\leqq a\leqq 1$ を動かしたときの $y=-x^2-1$，$y=ax$，$y=-x^2+1$ のグラフを考える．



例えば $x=0$ のときは，⑥ を満たす a は任意で，

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のときは，$a=-1$ が ⑥ を満たす．

よって

$$x\in I \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.\ \text{以下略．}$$

【別解 4：解を x として a, b の存在を追求 ②】

【別解 3】の $(*)$ まで同じ．

［ア］　$x=0$ のとき

この下で，⑤ は例えば $a=0$ で成り立つので，$0\in I$ である．

［イ］　$x>0$ のとき

$$|x^2+ax|\leqq 1$$
$$\Leftrightarrow -1\leqq x^2+ax\leqq 1$$
$$\Leftrightarrow -x^2-1\leqq ax\leqq -x^2+1$$
$$\Leftrightarrow -x-\frac{1}{x}\leqq a\leqq -x+\frac{1}{x}.$$

よって，$x>0$ の下で

$$x\in I \Leftrightarrow \begin{cases} -x-\dfrac{1}{x}\leqq 1 \\ -x+\dfrac{1}{x}\geqq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0<x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

［ウ］　$x<0$ のとき

$$⑤ \Leftrightarrow \begin{cases} |-a|\leqq 1 \\ |(-x)^2+(-a)(-x)|\leqq 1 \end{cases}$$

であるから，$-x>0$ および［イ］より

$$(-x)\in I \Leftrightarrow 0<-x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

から

$$x\in I \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq x<0.$$

［ア］〜［ウ］より

$$x\in I \Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\ \text{以下略．}$$

【別解 5：解を x として $a,\ b$ の存在を追求 ③】

【別解 3】の $(*)$ まで同じ．

混乱を避けるために x を t と表す．

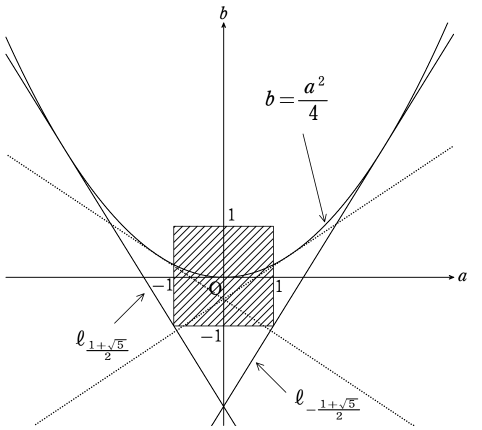
$$④ \iff \begin{cases} b=-ta-t^2 \\ |a| \leqq 1 \\ |b| \leqq 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑥$$

ここで，⑥ を t をパラメータとした ab 平面上の領域と考える．

直線 $b=-ta-t^2$ を ℓ_t とする．

$$b=-ta-t^2 \iff \left(t+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b$$

から，放物線 C を $b=\dfrac{a^2}{4}$ とすると，ℓ_t は C と $(a,\ b)=(-2t,\ t^2)$ で接しながら動く．



上の図より

$$t \in I \iff -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqq t \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$ 以下略．

$\boxed{2}$

3 つの正の整数 a, b, c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a+b+c$, $bc+ca+ab$, abc の最大公約数は 1 であることを示せ．

(2)　$a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ．

【難易度】

(1) やや易　(2) やや難

【講評】

(1) は，「最大公約数が 1 である」を，「共通の素因数 p を持つとして矛盾を導く」ことを経験していれば何とかなるだろう．(2) も同様の手法で進められるが，完全な議論ができている受験生は稀だろう．

【解答例】

以下，変数はすべて整数を前提とする．
また，$m\mathbb{Z}$ を，m の倍数すべての集合とする．
さらに，$f(x,\ y,\ z)$ は，x, y, z の最大公約数を表すものとする．

(1)　背理法で示す．つまり，

$a+b+c\in p\mathbb{Z}$,　……①
$bc+ca+ab\in p\mathbb{Z}$,　……②
$abc\in p\mathbb{Z}$　……③

なる素数 p が存在するとして矛盾を導く．
③より
　$a\in p\mathbb{Z}$ または $b\in p\mathbb{Z}$ または $c\in p\mathbb{Z}$.
対称性から仮に $a\in p\mathbb{Z}$ とする．
ゆえに $ca+ab=a(c+b)\in p\mathbb{Z}$ であり，これと ② から $bc\in p\mathbb{Z}$ がいえるので
　$b\in p\mathbb{Z}$ または $c\in p\mathbb{Z}$.
対称性から仮に $b\in p\mathbb{Z}$ とする．
ゆえに $a+b\in p\mathbb{Z}$ であり，これと ① から $c\in p\mathbb{Z}$ がいえる．
よって a, b, $c\in p\mathbb{Z}$. これは仮定に反する．終

(2)　$a+b+c=x$, $bc+ca+ab=y$, $abc=z$
とすると，(1) より $f(x,\ y,\ z)=1$.　……(*)
また
　$f(a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3)=G$
とする．
　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 2)$ のとき $G=1$,
　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 2)$ のとき $G=2$,
　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき $G=3$,
　$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 4)$ のとき $G=6$.
G はこの 4 つ以外の値を取らないことを示す．

$a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3\in d\mathbb{Z}$　……④

なる d を考える．

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$,
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

および ④ から
　x, $2y$, $3z\in d\mathbb{Z}$.　……⑤

[1]　d が 5 以上の素数のとき
　x, y, $z\in d\mathbb{Z}$ ゆえ $f(x,\ y,\ z)\in d\mathbb{Z}$.
[2]　$d=2^2$ のとき
　x, $z\in 4\mathbb{Z}$, $y\in 2\mathbb{Z}$ ゆえ $f(x,\ y,\ z)\in 2\mathbb{Z}$.
[3]　$d=3^2$ のとき
　x, $y\in 9\mathbb{Z}$, $z\in 3\mathbb{Z}$ ゆえ $f(x,\ y,\ z)\in 3\mathbb{Z}$.

これらは，すべて (*) に矛盾する．
よって G は 5 以上の素因数を持たず，素因数 2, 素因数 3 の個数はどちらも 2 以上にはならない．
ゆえに G のとりうる値は
　$G=1,\ 2,\ 3,\ 6$　答

【配点例】(60点)

(1)(計 15 点)
（ア）　証明の完成度に合わせて $\boxed{15\text{点}}$.
　※ 参考 にある通り，複数の解法があるため．

(2)(計 45 点)
（イ）　$G=1,\ 2,\ 3,\ 6$ に $\boxed{15\text{点}}$.
　※ $G=1,\ 2,\ 3$ や $G=2,\ 3$ は $\boxed{10\text{点}}$.
（ウ）　$G=1,\ 2,\ 3,\ 6$ の実現可能性に $\boxed{10\text{点}}$.
　※ $G=2,\ 3$ について調べてあれば $\boxed{5\text{点}}$.
（エ）　$a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3\in d\mathbb{Z}$
　$\Longrightarrow 2(bc+ca+ab)\in d\mathbb{Z}$ に $\boxed{5\text{点}}$.
（オ）　$a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3\in d\mathbb{Z}$
　$\Longrightarrow 3abc\in d\mathbb{Z}$ に $\boxed{5\text{点}}$.
（カ）　残りの証明に $\boxed{10\text{点}}$.

参考

合同式の次の性質：

p が素数のとき，mod p において

$$ab\equiv 0 \iff a\equiv 0 \text{ または } b\equiv 0$$

および三次方程式を利用して，(1) を次のように解ける．

(1)　p を素数とする．以下，mod p とする．

$$a+b+c\equiv 0, \quad \cdots\cdots ①$$
$$bc+ca+ab\equiv 0, \quad \cdots\cdots ②$$
$$abc\equiv 0 \quad \cdots\cdots ③$$

とする．この下で

$$\begin{aligned} & x\equiv a \text{ または } x\equiv b \text{ または } x\equiv c \\ \iff & x-a\equiv 0 \text{ または } x-b\equiv 0 \text{ または } x-c\equiv 0 \\ \iff & (x-a)(x-b)(x-c)\equiv 0 \\ \iff & x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc\equiv 0 \\ \iff & x^3\equiv 0 \\ \iff & x\equiv 0 \end{aligned}$$

ゆえ　$a\equiv b\equiv c\equiv 0$．これは矛盾．終

参考

次の性質を利用する方針も考えられる．

[1]　$f(x,\ y)=f(x,\ y-nx)$　(互除法の原理)

[2]　$f(x,\ -y)=f(x,\ y)$

[3]　$f(x,\ y,\ z)=f(x,\ f(y,\ z))$

[4]　$f(x,\ y,\ z)=f(x,\ y,\ z-nx)$

[5]　$f(x,\ y,\ z)=f(x,\ y,\ w)$ のとき
　　$f(x,\ y,\ z)=f(x,\ y,\ z,\ w)$

これらを使うと，次のような方針で解ける．

(1)　$f(a+b+c,\ bc+ca+ab,\ abc)=G_1$

とすると

$$abc-a(bc+ca+ab)=-a^2(b+c),$$
$$-a^2(b+c)+a^2(a+b+c)=a^3$$

から

$$G_1=f(a+b+c,\ bc+ca+ab,\ a^3).$$

対称性より

$$G_1=f(a+b+c,\ bc+ca+ab,\ a^3,\ b^3,\ c^3).$$

$f(a,\ b,\ c)=1$ から $f(a^3,\ b^3,\ c^3)=1$ ゆえ $G_1=1$.

(2)　$a+b+c=x,\ bc+ca+ab=y,\ abc=z$

とする．

$$f(a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3)=G_2$$

とすると

$$a^2+b^2+c^2-x^2=-2y,$$
$$a^3+b^3+c^3-x(a^2+b^2+c^2-y)=3z$$

から

$$G_2=f(x,\ 2y,\ 3z).$$

以下同じ．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$\boxed{3}$

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする．

(a)　時刻 t での点 A，B の座標は，それぞれ A$(\sin t,\ 0)$，B$(0,\ \cos t)$ である．
(b)　点 P は第一象限内にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ．

(2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ．

(3)　xy 平面内において，連立不等式

$$x^2-x+y^2<0,\quad x^2+y^2-y<0$$

により定まる領域を D とする．このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ．

【難易度】

(1)　標準　　(2)　標準　　(3)　やや難

【講評】

(1) は，先に $t=0$ のときと $t=\dfrac{\pi}{2}$ のときなどを調べれば，結論は先にわかる．(2) は，(3) のヒント．

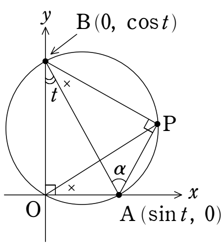
【解答例】

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=1$，$\angle\mathrm{OBA}=t$．

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$$

から 4 点 O，A，P，B は同一円周上にあるから，円周角の定理より



$$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

ゆえ，点 P は常に $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot x$　つまり

$y=\dfrac{x}{\tan\alpha}$ 上にある．

これは $t=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ でも成り立つ．$\boxed{\text{終}}$

(2)　正弦定理より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=1\cdot\sin\angle\mathrm{OBP}=\sin\left(t+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos(\alpha-t)=\cos(t-\alpha).$$

これは $t=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ でも成り立つ．

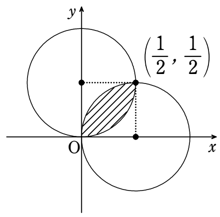
これを $f(t)$ とすると，$f(t)$ の増減は以下：

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(t)$	$\cos\alpha$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sin\alpha$

よって求める道のりは

$$1-\cos\alpha+1-\sin\alpha=2-\sin\alpha-\cos\alpha.\ \boxed{\text{答}}$$

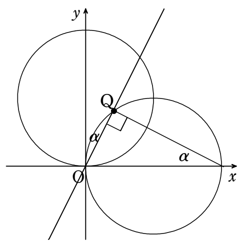
(3)　D は以下のようになる．
境界は含まない．



[1]　$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

(2) より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値は $\sin\alpha$ である．

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と $y=\dfrac{x}{\tan\alpha}$ の交点のうち O と異なる点を Q とする．



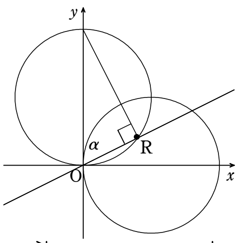
上の図より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\sin\alpha$ ゆえ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$．
よって P は D に入らない．

[2]　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

(2) より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最小値は $\cos\alpha$ である．

円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と $y=\dfrac{x}{\tan\alpha}$ の交点のうち O と異なる点を R とする．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．



上の図より $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|=\cos\alpha$ ゆえ $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$.
よって P は D に入らない.
以上より示された. 終

【配点例】(60点)

(1)(計 20 点)

（ア） $y=\dfrac{x}{\tan\alpha}$ に $\boxed{10\text{点}}$.

（イ） 証明に $\boxed{10\text{点}}$.

(2)(計 20 点)

（ウ） $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ あるいは P の座標に $\boxed{10\text{点}}$.

（エ） $2-\sin\alpha-\cos\alpha$ に $\boxed{10\text{点}}$.

(3)(計 20 点)

（オ） $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のときの証明に $\boxed{10\text{点}}$.

（カ） $\dfrac{\pi}{4}\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のときの証明に $\boxed{10\text{点}}$.

参考

(1) は, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\cos\alpha$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と x 軸の正方向のなす角が $t+\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ であることを利用して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$=\begin{pmatrix}\sin t\\ 0\end{pmatrix}+\cos\alpha\begin{pmatrix}\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\\ \sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\end{pmatrix}$$

と進めることもできる.

4

a は正の実数とする．複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \frac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\frac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　K が円となるための a の条件を求めよ．また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ．

(2)　a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．

【難易度】

(1)　やや易　　(2)　標準

【講評】

(1) は，類題は経験済みのはず．ただし，計算が楽ではない．アポロニウスの円の知識を使わないと，解答スペースが不足しそう．(2) は，パラメータ関数として増減を調べればなんということはないが，存在条件で攻めるとかなり苦労するだろう．

【解答例】

(1)　$w=\frac{z-3}{1-2z}$ を変形し

$$(1-2z)w=z-3$$
$$(-2w-1)z=-w-3.$$

$w=-\frac{1}{2}$ ではこの等式は成り立たないので，

K には点 $\left(-\frac{1}{2}\right)$ は含まれず，

$$z=\frac{w+3}{2w+1}.$$

これを $|z-1|=a$ に代入して変形し

$$\left|\frac{w+3}{2w+1}-1\right|=a$$
$$\left|\frac{-w+2}{2w+1}\right|=a$$
$$1|w-2|=2a\left|w+\frac{1}{2}\right|. \qquad \cdots\cdots ①$$

アポロニウスの円より，これが円となるための条件は $2a \neq 1$ つまり $a \neq \frac{1}{2}$．答

P(2)，Q$\left(-\frac{1}{2}\right)$ とし，PQ を $2a:1$ に内分する点を A(α)，$2a:1$ に外分する点を B(β) とすると，$a \neq \frac{1}{2}$ の下で ① の軌跡は，線分 AB を直径とした円になる．

$$\alpha=\frac{1\cdot 2+2a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a+1}=\frac{-a+2}{2a+1},$$
$$\beta=\frac{-1\cdot 2+2a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2a-1}=\frac{-a-2}{2a-1}$$

から，K の中心が表す複素数は

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-2(a^2+1)}{4a^2-1}.\ 答$$

また半径は

$$\left|\frac{\beta-\alpha}{2}\right|=\left|\frac{-5a}{4a^2-1}\right|=\frac{5a}{|4a^2-1|}.\ 答$$

(2)　虚軸に平行な円 K の直径の両端の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{-2(a^2+1)}{4a^2-1},\ \frac{5a}{4a^2-1}\right),$$
$$\mathrm{Q}\left(\frac{-2(a^2+1)}{4a^2-1},\ -\frac{5a}{4a^2-1}\right)$$

と考えてよい．

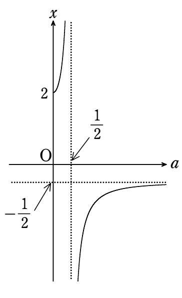
点 P の軌跡を，a をパラメータと見て調べる．

$0<a<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a<\infty$ の下で

$$f(a)=\frac{-2(a^2+1)}{4a^2-1},\quad g(a)=\frac{5a}{4a^2-1}$$

とする．

$$f(a)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4a^2-1},$$
$$f'(a)=-\frac{5}{2}\cdot\frac{-1\cdot 8a}{(4a^2-1)^2}>0,$$
$$\lim_{a\to+0}f(a)=2,$$
$$\lim_{a\to\frac{1}{2}-0}f(a)=\infty,$$
$$\lim_{a\to\frac{1}{2}+0}f(a)=-\infty,$$
$$\lim_{a\to\infty}f(a)=-\frac{1}{2},$$



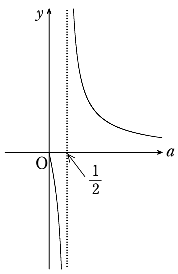
から $x=f(a)$ のグラフは右図．

また

$$g'(a)=5\cdot\frac{1\cdot(4a^2-1)-a\cdot 8a}{(4a^2-1)^2}$$
$$=5\cdot\frac{-4a^2-1}{(4a^2-1)^2}<0,$$

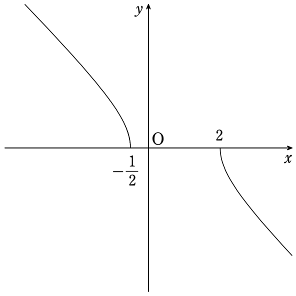
※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$$\lim_{a\to+0} g(a)=0,$$
$$\lim_{a\to\frac{1}{2}-0} g(a)=-\infty,$$
$$\lim_{a\to\frac{1}{2}+0} g(a)=\infty,$$
$$\lim_{a\to\infty} g(a)=0$$



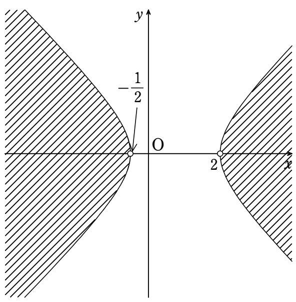
から $y=g(a)$ のグラフは右図．

よって，点 P の軌跡は以下：



したがって，求める領域は図の斜線部．

ただし，○ の点は含まず，他の境界は含む．答



【配点例】(60点)

(1)(計 35 点)

(ア)　$z=\dfrac{w+3}{2w+1}$ に $\boxed{5点}$．

(イ)　$1|w-2|=2a\left|w+\dfrac{1}{2}\right|$ に $\boxed{10点}$．

(ウ)　$2a\fallingdotseq 1$ に $\boxed{5点}$．

(エ)　円の中心に $\boxed{10点}$．

(オ)　円の半径に $\boxed{5点}$．

(2)(計 25 点)

(カ)　領域の図示までに $\boxed{25点}$．

※ 境界線の片方が出ていれば $\boxed{10点}$．

※ 斜線部が正しくて $\boxed{10点}$．

※ 除外点に触れて $\boxed{5点}$．

参考

(1) をアポロニウスの円の知識を使わずに解くには，① を変形すればよい．$a=\dfrac{1}{2}$ では ① は直線であり，$a\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ では ① を変形すると

$$\left|w-\frac{-2(a^2+1)}{4a^2-1}\right|=\frac{5a}{|4a^2-1|}$$

を得る．

参考

(2) を．以下のように a の存在に着目してもよい．

点 P の存在範囲を D とすると，

$(x,\ y)\in D$ となるための $x,\ y\in\mathbb{R}$ の条件は

$$\begin{cases} x=\dfrac{-2(a^2+1)}{4a^2-1} \\ y=\dfrac{5a}{4a^2-1} \end{cases} \cdots\cdots ②$$

なる正の実数 $a\left(a\fallingdotseq\dfrac{1}{2}\right)$ が存在すること

である．$x\fallingdotseq 0$，$y\fallingdotseq 0$，$x\fallingdotseq -\dfrac{1}{2}$ に留意し

②

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{4a^2-1} \\ a=\dfrac{(4a^2-1)y}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=\dfrac{-5}{4a^2-1} \\ a=\dfrac{(4a^2-1)y}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-1=\dfrac{-5}{2x+1} \\ a=\dfrac{-y}{2x+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot\dfrac{y^2}{(2x+1)^2}-1=\dfrac{-5}{2x+1} \\ y=-a(2x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-y^2=\dfrac{25}{16} & \cdots\cdots ③ \\ y=-2a\left(x+\dfrac{1}{2}\right) & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

④ を $a>0$ で変化させることにより，点 P の軌跡を得る．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

5

a は $0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，

$$f(x)=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-ax\right)$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　次の等式 (*) を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ．

$$(*)\qquad \int_0^1 f(x)dx=1$$

(2)　$0\leqq b<c\leqq 1$ を満たす実数 b, c について，不等式

$$f(b)(c-b)\leqq\int_b^c f(x)dx\leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ．

(3)　次の試行を考える．

[試行]　n 個の数 1, 2, ……, n を出目とする，あるルーレットを k 回まわす．

この [試行] において，各 $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について i が出た回数を $S_{n,\,k,\,i}$ とし，

$$(**)\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,\,k,\,i}}{k}=\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx$$

が成り立つとする．このとき，(1) の等式 (*) が成り立つことを示せ．

(4)　(3) の [試行] において出た数の平均値を $A_{n,\,k}$ とし，$A_n=\displaystyle\lim_{k\to\infty}A_{n,\,k}$ とする．(**) が成り立つとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ．

【難易度】

(1)(2)　やや易　　(3)　標準　　(4)　やや難

【講評】

(1)，(2) は定型問題なので，ここは外せない．(3) と (4) は題意が取りにくく，ルーレットの出目の確率が同様に確からしくないことも明記されておらず，すんなりとはいかなかっただろう．

【解答例】

(1)
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-ax\right)\\&=\frac{2}{3}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2ax\right\}\\&=\frac{2}{3}(\sin 2ax+1)\end{aligned}$$

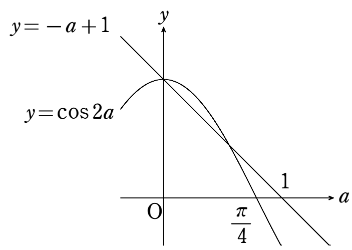
から

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\frac{2}{3}\left[-\frac{\cos 2ax}{2a}+x\right]_0^1\\&=\frac{2}{3}\left\{-\frac{\cos 2a}{2a}+1-\left(-\frac{1}{2a}\right)\right\}\\&=\frac{2}{3}+\frac{1-\cos 2a}{3a}\end{aligned}\qquad \cdots\cdots ♪$$

より (*) を変形すると

$$\frac{2}{3}+\frac{1-\cos 2a}{3a}=1$$
$$1-\cos 2a=a$$
$$\cos 2a=-a+1.$$

ここで，$y=\cos 2a$ と $y=-a+1$ のグラフを考える．



2 つのグラフは (0, 1) で交わり，$y=\cos 2a$ は $0<a<\dfrac{\pi}{4}$ で上に凸であることと $\dfrac{\pi}{4}<1$ から，$0<a<\dfrac{\pi}{4}$ でただ 1 つの交点を持つ．終

別解　♪まで同じ．

$$\int_0^1 f(x)dx=F(a)$$

とすると

$$\begin{aligned}F'(a)&=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sin 2a\cdot a-(1-\cos 2a)\cdot 1}{a^2}\\&=\frac{2a\sin 2a+\cos 2a-1}{3a^2}.\end{aligned}$$

この分子を $g(a)$ とすると

$$g(0)=0,$$
$$\begin{aligned}g'(a)&=2\sin 2a+4a\cos 2a-2\sin 2a\\&=4a\cos 2a\end{aligned}$$

より $0<a<\dfrac{\pi}{4}$ のとき $g(a)>0$ ゆえ $F'(a)>0$．

また

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$$\frac{1-\cos 2a}{a}=\frac{2\sin^2 a}{a}=\frac{\sin a}{a}\cdot 2\sin a$$

から

$$\lim_{a\to+0}F(a)=\frac{2}{3}+1\cdot 0=\frac{2}{3}<1$$

であり，

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{\frac{3}{4}\pi}=\frac{2}{3}+\frac{4}{3\pi}>\frac{2}{3}+\frac{4}{3\cdot 4}=1.$$

よって題意は示された．終

(2)　$f'(x)=\dfrac{4a}{3}\cos 2ax$ より，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，

$0\leqq 2ax\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ゆえ $f'(x)\geqq 0$.

ゆえに $b\leqq x\leqq c$ なる x について

$$f(b)\leqq f(x)\leqq f(c)$$

から

$$\int_b^c f(b)dx\leqq\int_b^c f(x)dx\leqq\int_b^c f(c)dx\quad\text{より}$$

$$f(b)(c-b)\leqq\int_b^c f(x)dx\leqq f(c)(c-b).$$ 終

(3)　$(**)$ に $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ を代入し加えると

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{n,k,i}}{k}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{n,k,i}}{k}=\frac{\sum_{i=1}^{n}S_{n,k,i}}{k}=\frac{k}{k}=1$$

より，$(**)$ が成り立つとき $(*)$ が成り立つ．終

(4)　$$A_{n,k}=\frac{\sum_{i=1}^{n}iS_{n,k,i}}{k}=\sum_{i=1}^{n}i\frac{S_{n,k,i}}{k}$$

であり，$(**)$ から

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}i\left(\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,k,i}}{k}\right)=\sum_{i=1}^{n}i\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}f(x)dx.$$

(2) において $b=\dfrac{i-1}{n}$，$c=\dfrac{i}{n}$ とすると

$$\sum_{i=1}^{n}i\cdot\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq A_n\leqq\sum_{i=1}^{n}i\cdot\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\frac{A_n}{n}\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right).$$

ここで

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)>\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

より

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)<\frac{A_n}{n}\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right).$$

$n\to\infty$ とすると最左辺，最右辺ともに

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ に収束するので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 x(\sin 2ax+1)dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[x\cdot\frac{-\cos 2ax}{2a}+\frac{\sin 2ax}{4a^2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{-\cos 2a}{2a}+\frac{\sin 2a}{4a^2}+\frac{1}{2}\right)$$ 答

$$=\frac{\sin 2a-2a\cos 2a+2a^2}{6a^2}.$$ 答

【配点例】(60点)

(1)(計 25 点)

(ア)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}+\frac{1-\cos 2a}{3a}$ に $\boxed{10\text{点}}$.

(イ)　残りの証明に $\boxed{15\text{点}}$.

本解なら，$\cos 2a$ と $-a+1$ などのグラフを考えることに $\boxed{5\text{点}}$，残りに $\boxed{10\text{点}}$.

別解なら，$F'(a)$ に $\boxed{5\text{点}}$，

$\displaystyle\lim_{a\to+0}F(a)<1$ に $\boxed{5\text{点}}$，$F(1)>1$ に $\boxed{5\text{点}}$.

(2)(計 5 点)

(ウ)　$f'(x)\geqq 0$ に $\boxed{5\text{点}}$.

(3)(計 10 点)

(エ)　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{n,k,i}}{k}\right)=\int_0^1 f(x)dx$ に $\boxed{5\text{点}}$.

(オ)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{n,k,i}}{k}=1$ を示して $\boxed{5\text{点}}$.

(4)(計 20 点)

(カ)　$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\frac{A_n}{n}\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

に $\boxed{5\text{点}}$.

(キ)　$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)<\frac{A_n}{n}\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$

の最左辺，最右辺が $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ に収束する

ことに $\boxed{5\text{点}}$.

(ク)　結論に $\boxed{10\text{点}}$.