※ これは昨年のものです。
今年のものは，3/1(火) ごろに公開します。

問題一覧

1

正の整数に関する条件

(※)　10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 (※) を満たす正の整数の個数を a_k とする．このとき，a_k を k の式で表せ．

(2)　正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n \text{ が条件 (※) を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件 (※) を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

2

xy 平面上の楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　a，b を実数とする．直線 $\ell : y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a，b の条件を求めよ．

(2)　実数 a，b，c に対して，直線 $\ell : y = ax + b$ と直線 $m : y = ax + c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする．ただし，$b > c$ とする．直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする．このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための a，b，c の条件を求めよ．

(3)　楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ．

3

以下の問いに答えよ．

(1)　正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2)　正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく．このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ．

(3)　a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ．

→解答例は 3 ページから．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

4

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする．S 上を動く点 A，B，C，D に対して

$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ．

(2)　点 A，B，C，D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ．

(3)　点 C の座標が $\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{15}}{4},0\right)$，点 D の座標が $(1,0,0)$ であるとき，$F=M$ となる S 上の点 A，B の組をすべて求めよ．

5

xy 平面上の円 C：$x^2+(y-a)^2=a^2$ $(a>0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　円 C が $y\geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(2)　円 C が $y\geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(3)　a が (2) の範囲にあるとする．xy 平面において連立不等式

$$|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\leqq y\leqq\frac{1}{4},$$
$$y\geqq x^2-x^4,\ x^2+(y-a)^2\geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

→解答例は 3 ページから．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEPが独自に作成したものです．

1

正の整数に関する条件

(※)　10進法で表したときに，どの位にも数字9が現れない

を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件(※)を満たす正の整数の個数を a_k とする．このとき，a_k を k の式で表せ．

(2)　正の整数 n に対して，

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (n\text{ が条件(※)を満たすとき})\\ 0 & (n\text{ が条件(※)を満たさないとき})\end{cases}$$

とおく．このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n<80$$

【難易度】

(1) 易　(2) 標準

【講評】

調和級数をテーマにした問題だが，この背景は知らなくても解く上では問題ない．

(1)は絶対に落とせない．(2)は，書き出して様子を見るのが重要．例えば $k=2$ とすると

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n$$
$$=\underbrace{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{a_1\text{ 個}}+\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}\right)}_{a_2\text{ 個}}$$
$$<\underbrace{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}\right)}_{a_1\text{ 個}}+\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}\right)}_{a_2\text{ 個}}$$

まで気づけば，あとは何とかなるだろう．

【解答例】

(1)　最高位には 1～8 の数字が入り，他の $k-1$ 個の位には 0～8 の数字が入るので

$a_k=8\cdot 9^{k-1}$．答

(2)　$S_k=\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n$ とすると

$$S_k=\sum_{n=1}^{10^1-1} b_n+\sum_{n=10}^{10^2-1} b_n+\cdots+\sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} b_n$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=10^{j-1}}^{10^j-1} b_n\right).$$

ここで

$$\sum_{n=10^{j-1}}^{10^j-1} b_n<\frac{1}{10^{j-1}}\cdot a_j=8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{j-1}$$

より

$$S_k<\sum_{j=1}^{k}8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{j-1}$$
$$=\frac{8\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\}}{1-\frac{9}{10}}<\frac{8}{\frac{1}{10}}=80$$ 終

【配点例】(60点)

※東工大の数学の配点は，例年5点刻みと予想される．（なぜなら，数学の開示得点が常に5の倍数）．

(1)(計15点)

（ア）　$a_k=8\cdot 9^{k-1}$ に $\boxed{15点}$．

(2)(計45点)

（イ）　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n=\sum_{n=1}^{10^1-1} b_n+\sum_{n=10}^{10^2-1} b_n+\cdots+\sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} b_n$

と分割するアイデアに $\boxed{10点}$．

（ウ）　$\displaystyle\sum_{n=10^{j-1}}^{10^j-1} b_n<\frac{1}{10^{j-1}}\cdot a_j$ に相当する部分に $\boxed{15点}$．

（エ）　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n<\frac{8\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\}}{1-\frac{9}{10}}$ に相当する部分に $\boxed{15点}$．

（オ）　$\displaystyle\frac{8\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\}}{1-\frac{9}{10}}<80$ に $\boxed{5点}$．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

2

xy 平面上の楕円

$$E : \frac{x^2}{4}+y^2=1$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　a，b を実数とする．直線 $\ell : y=ax+b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a，b の条件を求めよ．

(2)　実数 a，b，c に対して，直線 $\ell : y=ax+b$ と直線 $m : y=ax+c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする．ただし，$b>c$ とする．直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする．このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための a，b，c の条件を求めよ．

(3)　楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ．

【難易度】

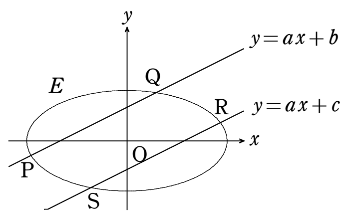
(1) 易　(2) 標準　(3) やや難

【講評】

楕円を素材にしてはいるものの，2 次方程式の解を文字置きして進める定形的な問題．(3) は，平行四辺形を正方形にレベルアップさせる条件を考える問題だが，計算が重たく楽にはいかないだろう．

【解答例】

(1)



E と ℓ の共有点の x 座標は，x の 2 次方程式:

$$\frac{x^2}{4}+(ax+b)^2=1$$

つまり

$$(4a^2+1)x^2+8abx+4(b^2-1)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

の実数解である．①の解は

$$x=\frac{-4ab\pm 2\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1} \quad \cdots\cdots ②$$

から，求める条件は　$4a^2-b^2+1>0$．㊟

(2)　点 P, Q, R, S の x 座標を，それぞれ p, q, r, s とする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{SR}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となる条件は

$$q-p=r-s$$

である．

②より　$q-p=\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$，

同様に　$r-s=\dfrac{4\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}$

から　$\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}=\dfrac{4\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}$

ゆえ　$b^2=c^2$．

$b>c$ より，求める条件は

$b>0$　かつ　$c=-b$．㊟

(3)　四角形が平行四辺形となるとき，4 つの頂点は (2) の P, Q, R, S としてよく，さらに平行四辺形になるための条件は $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ であるから $c=-b$ として考える．

このとき，直線 PR と直線 QS は点 O を中心に点対称となる．　……(*)

まず，平行四辺形が長方形になる条件は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$$

である．

P$(p,\ ap+b)$，Q$(q,\ aq+b)$ より

$$p^2+(ap+b)^2=q^2+(aq+b)^2$$

$$(a^2+1)p^2+2abp=(a^2+1)q^2+2abq$$

$$(a^2+1)(p+q)(p-q)+2ab(p-q)=0$$

$$(a^2+1)(p+q)+2ab=0 \quad (\ p-q<0\ より\ )$$

$$(a^2+1)\cdot\frac{-8ab}{4a^2+1}+2ab=0 \quad (\ ①より\ )$$

$$(a^2+1)\cdot\frac{-4a}{4a^2+1}+a=0 \quad (\ b>0\ より\ )$$

$$a\left\{\frac{-4(a^2+1)}{4a^2+1}+1\right\}=0$$

$$a\cdot\frac{-3}{4a^2+1}=0$$

$$a=0.$$

よって，長方形は y 軸についても対称となるので，4 点の座標は $(\pm q,\ \pm b)$（複号任意）である．

さらに，長方形が正方形になる条件は，

点 Q $(q,\ b)$ が直線 $y=x$ 上にあることである．

これから，正方形の頂点の座標は

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\ （複号任意）$$

のただ 1 組であると求まる．答

別解

(∗) までは同じ．
平行四辺形が長方形になる条件は，4 つの頂点が同一円周上にあることである．
その円 C の方程式は $x^2+y^2=r^2$ $(1<r<2)$ とおけ，C と E の交点の座標は，複号任意として

$$(x,\ y)=\left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}(r^2-1)},\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}(4-r^2)}\right).$$

さらに，これが正方形になる条件は

$$\frac{4}{3}(r^2-1)=\frac{1}{3}(4-r^2).$$ 以下略．

【配点例】（60点）

(1)(計 10 点)
- (ア)　①の二次方程式の作成に $\boxed{5\text{点}}$．
- (イ)　結論に $\boxed{5\text{点}}$．

(2)(計 20 点)
- (ウ)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ と同値な式から $a,\ b,\ c$ の関係式を立てて $\boxed{10\text{点}}$．
- (エ)　$b^2=c^2$ に $\boxed{5\text{点}}$．
- (オ)　$c=-b$ に相当する式に $\boxed{5\text{点}}$．
  ※ (3) で示してもよい．

(3)(計 30 点)
- (カ)　長方形になる条件を立式して $\boxed{5\text{点}}$．
- (キ)　$a=0$ を導いて $\boxed{15\text{点}}$．
- (ク)　正方形の頂点の座標を求めて $\boxed{10\text{点}}$．
  ※ $a=0$ の論証が不十分だが，座標だけが求められている場合にも $\boxed{5\text{点}}$ を与える．

参考

(3) において，ひし形になる条件を先に変形しても有益な結果は得られない．

また，長方形になる条件については

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$$

であり，どちらも計算量は大差ない．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEPが独自に作成したものです．

3

以下の問いに答えよ．

(1)　正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2)　正の整数 n に対して，

$$a_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく．このとき，$n\geqq 4$ ならば $a_n>n+2$ であることを示せ．

(3)　a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ．

【難易度】

(1) 標準　(2) 標準　(3) 難

【講評】

東工大では珍しい二項係数を素材にした問題．(1) では互いに素の議論が必要，(2) は数学的帰納法と，これだけでもかなりの力が必要．なお，一般項が確定した数列について，わざわざ漸化式を作る手筋は東工大頻出．

(3) は難問．誘導にいかに乗るかが勝負．とりあえず漸化式に数字を代入して並べてみる．$a_7=\dfrac{30}{8}a_6$，(2) より $a_6>8$．このあたりを眺めたり書き出したりして，着想をひねり出す．

【解答例】

(1)　以後，正の整数の集合を $\mathbb{N}$ と表す．

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=n\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!},$$

$$(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}=(n+1)\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!}$$

より

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}. \qquad \cdots\cdots①$$

ここに ${}_{2n}\mathrm{C}_n$，${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}\in\mathbb{N}$ であり，n と $n+1$ は互いに素であるから，${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ は n の倍数であるので，$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}}{n}\in\mathbb{N}$．

また①より

$${}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1)\cdot\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}}{n}.$$

よって，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数である．(終)

(2)

$$a_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}=\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!},$$

$$a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}$$

より

$$a_{n+1}=\frac{4n+2}{n+2}a_n. \qquad \cdots\cdots②$$

まず $a_4=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{5}=14$，$4+2=6$ より $a_n>n+2$ は $n=4$ で成り立つ．

次に，k を $k\geqq 4$ なる整数として

$$a_k>k+2 \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つと仮定する．

②より

$$a_{k+1}=\frac{4k+2}{k+2}a_k>\frac{4k+2}{k+2}\cdot(k+2)\quad(③より)\quad=4k+2.$$

また

$$4k+2-\{(k+1)+2\}=3k-1>0.$$

よって $a_{k+1}>(k+1)+2$.

ゆえに，$n\geqq 4$ ならば $a_n>n+2$ である．(終)

(3)　(1) より $a_n\in\mathbb{N}$ であり，これと②から，$n+2$ は $4n+2$ と a_n で約分される．つまり

$$\frac{4n+2}{x},\ \frac{a_n}{y}\in\mathbb{N},\ n+2=xy$$

なる x，$y\in\mathbb{N}$ が存在する．これを用いて

$$a_{n+1}=\frac{4n+2}{x}\cdot\frac{a_n}{y}.$$

ここで $n\geqq 4$ とする．$x\leqq n+2$，$y\leqq n+2$ より

$$\frac{4n+2}{x}\geqq\frac{4n+2}{n+2}>1,$$

$$\frac{a_n}{y}\geqq\frac{a_n}{n+2}>1.\ \ ((2)より)$$

ゆえに $\dfrac{4n+2}{x}$，$\dfrac{a_n}{y}$ は2以上の整数であるから，a_{n+1} は合成数である．

つまり，$n\geqq 5$ で a_n は素数ではなく

$$a_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{2}=1,\ a_2=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{3}=2,$$

$$a_3=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{4}=5,\ a_4=14$$

より，a_n が素数となるのは $n=2,\ 3$．(答)

別解

(1) より $a_n \in \mathbb{N}$ である．

次の条件を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在すると仮定する．

「$m \geqq 5$ であり，a_m は素数である」

(2) より $a_m > m+2$ であるから，$m+2$ は a_m の倍数ではないので，a_m と $m+2$ は互いに素である．

②より $a_{m+1} = \dfrac{4m+2}{m+2} a_m$ であり，$m+2$ は a_m とは約分できないので，$\dfrac{4m+2}{m+2} \in \mathbb{N}$.

ところが

$$4m+2-3(m+2) = m-4 > 0,$$
$$4(m+2)-(4m+2) = 6 > 0$$

から

$$3(m+2) < 4m+2 < 4(m+2)$$

より

$$3 < \frac{4m+2}{m+2} < 4.$$

これは矛盾．以下略．

【配点例】（60点）

(1)(計 10 点)

（ア）　$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ の証明に $\boxed{5点}$.

（イ）　${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ が n の倍数である証明に $\boxed{5点}$.

(2)(計 25 点)

（ウ）　$a_{n+1} = \dfrac{4n+2}{n+2} a_n$ あるいはそれに相当する変形に $\boxed{10点}$．※ (3) で示しても OK.

（エ）　$n=4$ のときの証明に $\boxed{5点}$.

（オ）　$n=k$ のときの仮定から $n=k+1$ のときを示す部分に $\boxed{10点}$.

(3)(計 25 点)

（カ）　$a_n \in \mathbb{N}$ に $\boxed{5点}$.

（キ）　$n \geqq 5$ で a_n が合成数であることを示して $\boxed{15点}$.

（ク）　$n=2,\ 3$ に $\boxed{5点}$．※結論のみでも OK

4

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする．S 上を動く点 A，B，C，D に対して

$$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ．

(2) 点 A，B，C，D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ．

(3) 点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{15}}{4},0\right)$，点 D の座標が $(1,0,0)$ であるとき，$F=M$ となる S 上の点 A，B の組をすべて求めよ．

【難易度】

(1) 易　(2) 標準　(3) やや難

【講評】

空間ベクトルの問題だが，(2) までは計算するだけなので何とかしたい．(3) は，閃かないと厳しい．

【解答例】

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$ に留意する．

(1)
$$\begin{aligned}F&=2(|\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2)\\&\quad-3(|\vec{d}-\vec{a}|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2+|\vec{d}-\vec{c}|^2)\\&=2(2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2-2\vec{c}\cdot\vec{a})\\&\quad-3(2-2\vec{a}\cdot\vec{d}+2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+2-2\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=-6-4(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\&\quad+6\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}&(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})\\&=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\&=3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})-3\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).\end{aligned}$$

よって

$$F=(-2)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$$

と書け，$k=-2$．答

(2)
$$\begin{aligned}F&=(-2)\{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3\vec{d}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}\\&=(-2)\left|(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

よって，F が最大となる条件は

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{d}\qquad\cdots\cdots①$$

となることであり，これは例えば

$$\vec{d}=(1,\ 0,\ 0),\ \vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),$$
$$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4}\right),$$
$$\vec{c}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$$

で成立するので，$M=\dfrac{9}{2}$．答

(3) ①より　$\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{3}{2}\vec{d}-\vec{c}$　から

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=\frac{3}{2}(1,\ 0,\ 0)-\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{15}}{4},0\right)\\&=\left(\frac{7}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4},0\right)\qquad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

より

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=2.$$

また $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$．

三角不等式 $|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ の等号が成立するのは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが等しいときに限るので，②より

$$\vec{a}=\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{4},-\frac{\sqrt{15}}{4},0\right)$$

から

$$\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},-\frac{\sqrt{15}}{8},0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},-\frac{\sqrt{15}}{8},0\right).$$ 答

【配点例】(60点)

(1)(計 15 点)

（ア）　$F=(-2)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$ を示して $\boxed{10点}$．

（イ）　$k=-2$ に $\boxed{5点}$．

(2)(計 20 点)

（ウ）　$M=\dfrac{9}{2}$ に $\boxed{15点}$．

（エ）　等号成立の状況が起きることを示して $\boxed{5点}$．

(3)(計 25 点)

（オ）　②に $\boxed{5点}$．

（カ）　A，B の座標に $\boxed{20点}$．

参考

(3) の②以降は，力ずくでも求まる．

$$\frac{7}{4}=p,\quad -\frac{\sqrt{15}}{4}=q,$$

$$\vec{a}=(x,\ y,\ z),\ \vec{b}=(p-x,\ q-y,\ -z)$$

とすると　$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=1$ より

$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad \cdots\cdots③$$

$$(p-x)^2+(q-y)^2+z^2=1. \qquad \cdots\cdots④$$

③−④より

$$-p^2+2px-q^2+2qy=0$$

$$2px+2qy=p^2+q^2=4 \quad \text{から} \quad y=\frac{2-px}{q}.$$

③に代入し

$$x^2+\frac{(2-px)^2}{q^2}+z^2=1$$

$$q^2x^2+4-4px+p^2x^2+q^2z^2=q^2$$

$$4x^2-4px+q^2z^2=q^2-4$$

$$4\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+q^2z^2=q^2-4+p^2=0$$

より　$x=\dfrac{p}{2},\ z=0.$

5

xy 平面上の円 $C：x^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　円 C が $y\geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(2)　円 C が $y\geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(3)　a が (2) の範囲にあるとする．xy 平面において連立不等式

$$|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\leqq y\leqq\frac{1}{4},$$

$$y\geqq x^2-x^4,\ x^2+(y-a)^2\geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

【難易度】

(1) 標準　(2) 難　(3) 標準

【講評】

(1) は過去問に類題もある有名問題だが，(2) は難問．それを乗り越えても，(3) では場合分けがあり，すべてを解答用紙に書き切るのは大変．実戦的には，(2) をスルーして，(3) で部分点を稼ぎたいところ．

円の方程式は扱いにくいので，円の中心とグラフ上の点の距離を考えると解きやすい．

【解答例】

C の中心を $\mathrm{Q}(0,\ a)$ とする．

(1)　$y=x^2$ 上の点を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=t^2+(t^2-a)^2=t^4-(2a-1)t^2+a^2.$$

$y=x^2$ と C は y 軸対称であり，原点を共有するので，求める条件は，任意の $t>0$ で

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\geqq a^2 \quad\cdots\cdots①$$

が成り立つことである．

①を変形し

$$t^4-(2a-1)t^2\geqq0$$

$$t^2-(2a-1)\geqq0.\ (\ t^2>0\ より)$$

これが $t>0$ で成り立つ条件は

$$2a-1\geqq0\quad つまり\quad 0<a\leqq\frac{1}{2}.\ 答$$

別解

$$x^2+(y-a)^2=a^2 \iff y=a\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

また，$y=x^2$ と C は y 軸対称であり，原点を共有するので，求める条件は，任意の $0<x\leqq a$ で

$$a-\sqrt{a^2-x^2}-x^2\geqq0$$

が成り立つことである．

$\sqrt{a^2-x^2}=t$　とすると　$x^2=a^2-t^2$．

よって求める条件は，任意の $0\leqq t<a$ で

$$a-t-(a^2-t^2)\geqq0 \quad\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことである．

$$(*) \iff (a-t)-(a-t)(a+t)\geqq0$$

$$\iff 1-a-t\geqq0\quad (\ a-t>0\ より\ )$$

であり，$f(t)=1-a-t$ とするとこれは単調減少より，求める条件は

$$f(a)\geqq0\quad つまり\quad 0<a\leqq\frac{1}{2}.\ 答$$

(2)　$y=x^2-x^4$ 上の点を $\mathrm{P}(t,\ t^2-t^4)$ とすると，$u=t^2$ として

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=u+(u-u^2-a)^2$$

$$=u^4-2u^3+(2a+1)u^2+(1-2a)u+a^2.$$

$y=x^2-x^4$ と C は y 軸対称であり，原点を共有するので，求める条件は，任意の $t>0$ つまり任意の $u>0$ で

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\geqq a^2 \quad\cdots\cdots③$$

が成り立つことである．

③を変形し

$$u^4-2u^3+(2a+1)u^2+(1-2a)u\geqq0$$

から $u>0$ より

$$u^3-2u^2+(2a+1)u+(1-2a)\geqq0.$$

ここで

$$f(u)=u^3-2u^2+(2a+1)u+(1-2a)$$

とすると，$f(0)\geqq0$ つまり $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ が必要．

ところが，任意の x について $x^2\geqq x^2-x^4$ であるから，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ ならば (1) より円 C は $y\geqq x^2-x^4$ に含まれる．

よって求める必要十分条件は　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$．答

別解

$y=x^2-x^4$ と C は y 軸対称であり，原点を共有するので，求める条件は，任意の $0<x\leqq a$ で

$$a-\sqrt{a^2-x^2}-(x^2-x^4)\geqq0$$

が成り立つことである．

$\sqrt{a^2-x^2}=t$　とすると　$x^2=a^2-t^2$．

よって求める条件は，任意の $0\leqq t<a$ で

$$a-t-(a^2-t^2)-(a^2-t^2)^2\geqq0 \quad\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことである．

$$(*)$$

$$\iff (a-t)-(a-t)(a+t)-(a-t)^2(a+t)^2\geqq0$$

※東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$\iff 1-(a+t)-(a-t)(a+t)^2 \geqq 0$

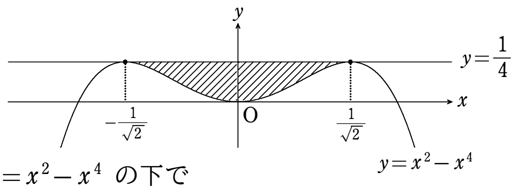
（$a-t>0$ より）

から $g(t)=1-(a+t)-(a-t)(a+t)^2$ とおくと，

$g(a) \geqq 0$ つまり $0<a\leqq \dfrac{1}{2}$ が必要．以下略．

(3)　求める体積を V とする．

まず，$|x|\leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$0\leqq y\leqq \dfrac{1}{4}$，$y\geqq x^2-x^4$ を満たす領域を y 軸の周りに 1 回転させた立体の体積 V_1 を求める．



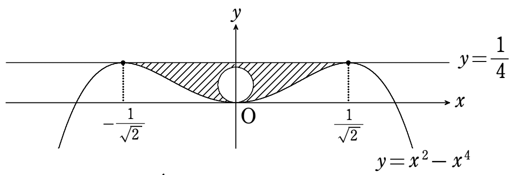
$y=x^2-x^4$ の下で

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{4}} x^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2\frac{dy}{dx}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2(2x-4x^3)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)=\frac{\pi}{24}.$$

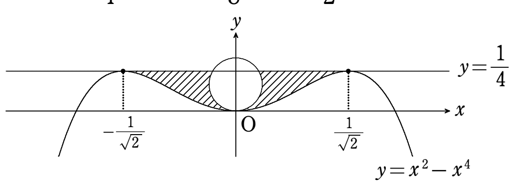
（ア）　$2a\leqq\dfrac{1}{4}$ つまり $0<a\leqq\dfrac{1}{8}$ のとき



$$V=V_1-\frac{4}{3}\pi a^3$$

$$=\left(\frac{1}{24}-\frac{4}{3}a^3\right)\pi.\ 答$$

（イ）　$2a\geqq\dfrac{1}{4}$ つまり $\dfrac{1}{8}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$x^2+(y-a)^2=a^2$ の下で

$$V=V_1-\pi\int_0^{\frac{1}{4}}x^2dy$$

であり

$$\pi\int_0^{\frac{1}{4}}x^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\{a^2-(y-a)^2\}dy$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(2ay-y^2)dy$$

$$=\pi\left[ay^2-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{a}{16}-\frac{1}{192}\right)\pi$$

から

$$V=\frac{\pi}{24}-\left(\frac{a}{16}-\frac{1}{192}\right)\pi=\left(\frac{3}{64}-\frac{a}{16}\right)\pi.\ 答$$

【配点例】（60点）

(1)（計 15 点）

（ア）　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ までに $\boxed{15点}$．

※目安として，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ を t で示す，あるいは不等式 $a-\sqrt{a^2-x^2}-x^2\geqq 0$ までに $\boxed{5点}$，残りに $\boxed{10点}$．

(2)（計 15 点）

（イ）　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ の必要性に $\boxed{10点}$．

（ウ）　$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ の十分性に $\boxed{5点}$．

(3)（計 30 点）

（エ）　V_1 あるいはそれに相当する計算に $\boxed{10点}$．

（オ）　$a=\dfrac{1}{8}$ の前後で場合分けすることに $\boxed{5点}$．

（カ）　$0<a\leqq\dfrac{1}{8}$ の体積に $\boxed{5点}$．

（キ）　$\dfrac{1}{8}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ での体積に $\boxed{10点}$．

参考

(2) で，(1) の利用に気づかなかった場合は，

$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$f(u)=u^3-2u^2+(2a+1)u+(1-2a)$$

$$\geqq u^3-2u^2+u=u(u-1)^2\geqq 0$$

と評価すればよい．

(3) は $V_1=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x\left(\frac{1}{4}-x^2+x^4\right)dx$ でも求まる．

（バウムクーヘン積分）