※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

問題一覧

1

次の問いに答えよ．

(1)　$|x^2-x-23|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ．

(2)　k 個の連続した正の整数 x_1，…，x_k に対して，

$$|x_j{}^2-x_j-23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，…，x_k をすべて求めよ．ここで k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \cdots,\ x_1+k-1$$

となる列のことである．

2

複素数平面上の異なる 3 点A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここでA，B，C は同一直線上にないと仮定する．

(1)　△ABC が正三角形となる必要十分条件は，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

であることを示せ．

(2)　△ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし 2 点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

3

座標空間に 5 点

O(0，0，0)，A(3，0，0)，B(0，3，0)，
C(0，0，4)，P(0，0，−2)

をとる．さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 Q$(a,0,0)$ と R$(0,b,0)$を考える．

(1)　点 P，Q，R を通る平面を H とする．
平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および
平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ．

(2)　点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 (a,b) の範囲を座標平面上に図示せよ．

→解答例は 3 ページから．

4

n を正の奇数とする．
曲線 $y=\sin x$ $((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x+y=0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させて出来る回転体を V_n とする．

(1)　$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x, \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2)　(1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

5

k を正の整数とし，$a_k=\displaystyle\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ とおく．

(1)　a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2)　k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3)　(2) の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列 $\{k^m a_k - k^n A\}$ が 0 ではない値に収束する整数 m，n $(m>n\geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4)　(2) と (3) の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列 $\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$ が 0 ではない値に収束する整数 p，q，r $(p>q>r\geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値を求めよ．

→解答例は 3 ページから．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

1

次の問いに答えよ．

(1)　$|x^2-x-23|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ．

(2)　k 個の連続した正の整数 x_1，…，x_k に対して，

$$|x_j{}^2-x_j-23| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，…，x_k をすべて求めよ．ここで k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \cdots,\ x_1+k-1$$

となる列のことである．

【難易度】

(1) 易　(2) やや易

【講評】

頻出問題で，経験済みであれば絶対に外せない．経験をしていなかったとしても，mod 3 に着目することが示されているのでなんとかしたい．

【解答例】

以下，mod 3 とする．

(1)　$f(x)=x^2-x-23$ $(x=1,\ 2,\ \cdots)$ とする．

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-23	-21	-17	-11	-3	7	19	33
$\lvert f(x)\rvert$	23	21	17	11	3	7	19	33

上の表より，$x \leqq 5$ において $|f(x)| \equiv 2$ となるのは $x=1,\ 3,\ 4$ のときに限る．

また，$f(x)=x(x-1)-23$ から $f(x)$ は単調増加であるから，$x \geqq 6$ のとき $f(x) \geqq f(6)=7$ より

$$|f(x)|=f(x) \equiv x(x-1)+1$$

ゆえ

$x \equiv 0$ のとき $|f(x)| \equiv 0\cdot(-1)+1 \equiv 1$，

$x \equiv 1$ のとき $|f(x)| \equiv 1\cdot 0+1 \equiv 1$，

$x \equiv 2$ のとき $|f(x)| \equiv 2\cdot 1+1 \equiv 0$．

よって $x \geqq 6$ のとき $|f(x)| \not\equiv 2$．

ゆえに求める x は $x=1,\ 3,\ 4$．答

(2)　(1) より，$x=8,\ 11,\ 14,\ \cdots$ において $|f(x)| \equiv 0$ であり，$|f(x)|=f(x) \geqq f(8)=33$ であるから，$|f(x)|$ は 33 以上の 3 の倍数ゆえ素数ではない．

また (1) より，$1 \leqq x \leqq 7$ のとき，$|f(x)|$ が素数となる x は $x=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ のみ．

よって求める k の最大値は $k=5$ であり，5 個の連続する整数は　3, 4, 5, 6, 7　である．答

【配点例】（60点）

※東工大の数学の配点は，例年 5 点刻みと予想される．
（なぜなら，数学の開示得点が常に 5 の倍数）．

(1)(計 40 点)

（ア）　$x \leqq 5$ において $|f(x)| \equiv 2$ となるのが $x=1,\ 3,\ 4$ のときに限ることに $\boxed{10\text{点}}$．

（イ）　$x \geqq 6$ において $x \equiv 0,\ 1$ のとき $|f(x)| \equiv 1$ となることに $\boxed{15\text{点}}$．

（ウ）　$x \geqq 6$ において $x \equiv 2$ のとき $|f(x)| \equiv 0$ となることに $\boxed{15\text{点}}$．

(2)(計 20 点)

（エ）　$x=8,\ 11,\ 14,\ \cdots$ において $|f(x)|$ が素数でないことに $\boxed{10\text{点}}$．（(ウ)がなければ NG）

（オ）　結論に $\boxed{10\text{点}}$．（結論のみでOK）

2

複素数平面上の異なる 3 点A，B，C を複素数 α，β，γ で表す．ここでA，B，C は同一直線上にないと仮定する．

(1)　△ABC が正三角形となる必要十分条件は，
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$
であることを示せ．

(2)　△ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる．このとき，
$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$
および
$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$
を外接円の半径 R を用いて表せ．ただし 2 点 X，Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す．

【難易度】

(1) やや易　(2) 標準

【講評】

(1) は有名問題だが，複素数平面は得意不得意が分かれる単元なので，点差は開いている．

(2) はいろいろな解法が考えられる良問．正三角形の中心を原点として考えてよいことに気づきたいところ．また，点 P が三角形の頂点に一致するときや，点 P が外接円の劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中点にあるときを考えれば，結論は予想できる．

【解答例】

(1)　△ABC が正三角形になる条件は
$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\ \text{(複号同順)}$$
であり，これを同値変形していく．
$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$$
$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$
$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)+1=0$$
$$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$
$$\gamma^2-2\alpha+\alpha^2-(\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta+\alpha^2)$$
$$+\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2=0$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$ 終

別解 その 1

$$\triangle\mathrm{ABC}\text{が正三角形である}$$
$$\Leftrightarrow\quad \triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{BCA}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}. \quad\cdots\cdots(*)$$
(*)を変形すると
$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)$$
$$\gamma^2-\gamma\alpha-\beta\gamma+\alpha\beta=\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+\alpha\beta$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$ 終

別解 その 2

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=z$$
とすると　$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)z$，$\gamma=(\beta-\alpha)z+\alpha$.

この下で　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$　を同値変形していく．
$$\gamma(\gamma-\alpha-\beta)+(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=0$$
$$\{(\beta-\alpha)z+\alpha\}\{(\beta-\alpha)z-\beta\}$$
$$+(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=0$$
$$(\beta-\alpha)^2z^2-(\beta-\alpha)^2z-\alpha\beta$$
$$+(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=0$$
$$(\beta-\alpha)^2z^2-(\beta-\alpha)^2z+(\beta-\alpha)^2=0.$$
$\beta\neq\alpha$ より
$$z^2-z+1=0$$
$$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$
$$z=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).\ \text{(複号同順)}$$
よって示された．終

(2)　P(z) とする．

四角形 A，B，C，P を平行移動しても辺の長さは変わらないので，△ABC の外接円の中心を原点に移動して考えてよい．
$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|z|=R$$
であり，正三角形の重心と外心は一致するので
$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0\quad\text{から}\quad\alpha+\beta+\gamma=0. \quad\cdots\cdots①$$
さらに (1) より　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0.$　……②

また
$$\mathrm{AP}^2=|z-\alpha|^2$$
$$=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$$
$$=|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+|\alpha|^2$$
$$=2R^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z$$

より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\\
&=6R^2-(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}-(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z\\
&=6R^2-0\overline{z}-(\overline{0})z \quad (\text{①より})\\
&=6R^2.\ \boxed{答}
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^4\\
&=4R^4+(\alpha\overline{z})^2+(\overline{\alpha}z)^2\\
&\qquad+2\{-2R^2\alpha\overline{z}+|\alpha|^2|z|^2-2R^2\overline{\alpha}z\}\\
&=4R^4+\alpha^2\overline{z^2}+\overline{\alpha^2}z^2+2R^4-4R^2(\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z)\\
&=6R^4+\alpha^2\overline{z^2}+\overline{\alpha^2}z^2-4R^2(\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4\\
&=\ 18R^4+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\overline{z^2}+\overline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}z^2\\
&\quad-4R^2\{(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}+\overline{\alpha+\beta+\gamma}z\}\\
&=18R^4.\ \boxed{答}\ (\text{①，② より})
\end{aligned}
$$

別解 その 1

$\omega=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ とする．

四角形 A，B，C，P を平行移動・回転移動・線対称移動しても辺の長さは変わらないので，
△ABC の外心を原点とし

$$\alpha=R(1+0i)=R,\ \beta=R\omega,\ \gamma=R\omega^2$$

としてよく，P(z) とすると $|z|=R$ である．

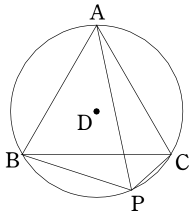
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\\
&=|z-R|^2+|z-R\omega|^2+|z-R\omega^2|\\
&=|z-R||\overline{z}-R|+|z-R\omega||\overline{z}-R\omega^2|\\
&\qquad\qquad+|z-R\omega^2||\overline{z}-R\omega|\\
&=\ |z|^2-R(z+\overline{z})+R^2\\
&\quad+|z|^2-R(z\omega^2+\overline{z}\omega)+R^2\\
&\quad+|z|^2-R(z\omega+\overline{z}\omega^2)+R^2\\
&=\ 2R^2-R(z+\overline{z})\\
&\quad+2R^2-R(z\omega^2+\overline{z}\omega)\\
&\quad+2R^2-R(z\omega+\overline{z}\omega^2)\\
&=6R^2-R\{z(1+\omega+\omega^2)+\overline{z}(1+\omega+\omega^2)\}\\
&=6R^2.\ \boxed{答}
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4\\
&=\ 4R^4-4R^3(z+\overline{z})+R^2(z+\overline{z})^2\\
&\quad+4R^4-4R^3(z\omega^2+\overline{z}\omega)+R^2(z\omega+\overline{z}\omega^2)^2\\
&\quad+4R^4-4R^3(z\omega+\overline{z}\omega^2)+R^2(z\omega^2+\overline{z}\omega)^2\\
&=\ 12R^4-4R^3\{z(1+\omega+\omega^2)+\overline{z}(1+\omega+\omega^2)\}\\
&\quad+R^2\{z(1+\omega^2+\omega^4)+6|z|^2+\overline{z}(1+\omega^4+\omega^2)\}\\
&=12R^4+6R^4=18R^4.\ \boxed{答}
\end{aligned}
$$

別解 その 2

△ABC の外心を D$(\vec{0})$ とし，



$$
\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{a},\quad
\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{b},\quad
\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c},\quad
\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{p}
$$

とすると

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{p}|=R,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=R^2\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{R^2}{2}.$$

△ABC の外心は重心と一致するので

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{0}\quad すなわち\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\\
&=|\vec{p}-\vec{a}|^2+|\vec{p}-\vec{b}|^2+|\vec{p}-\vec{c}|^2\\
&=\ |\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2\\
&\quad+|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\
&\quad+|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\
&=(2R^2-2\vec{p}\cdot\vec{a})+(2R^2-2\vec{p}\cdot\vec{b})+(2R^2-2\vec{p}\cdot\vec{c})\\
&=6R^2-2\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\
&=6R^2-2\vec{p}\cdot\vec{0}=6R^2.\ \boxed{答}
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4\\
&=(2R^2-2\vec{p}\cdot\vec{a})^2\\
&\qquad+(2R^2-2\vec{p}\cdot\vec{b})^2+(2R^2-2\vec{p}\cdot\vec{c})^2\\
&=\ 4R^4-8R^2\vec{p}\cdot\vec{a}+4(\vec{p}\cdot\vec{a})^2\\
&\quad+4R^4-8R^2\vec{p}\cdot\vec{b}+4(\vec{p}\cdot\vec{b})^2\\
&\quad+4R^4-8R^2\vec{p}\cdot\vec{c}+4(\vec{p}\cdot\vec{c})^2\\
&=12R^4-8R^2\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\
&\qquad+4\{(\vec{p}\cdot\vec{a})^2+(\vec{p}\cdot\vec{b})^2+(\vec{p}\cdot\vec{c})^2\}.\\
&=12R^4+4\{(\vec{p}\cdot\vec{a})^2+(\vec{p}\cdot\vec{b})^2+(\vec{p}\cdot\vec{c})^2\}.
\end{aligned}
$$

ここで $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$ から

$$(\vec{p}\cdot\vec{c})^2=\{-\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\}^2=(\vec{p}\cdot\vec{a}+\vec{p}\cdot\vec{b})^2$$

より

$$
\begin{aligned}
&(\vec{p}\cdot\vec{a})^2+(\vec{p}\cdot\vec{b})^2+(\vec{p}\cdot\vec{c})^2\\
&=2\{(\vec{p}\cdot\vec{a})^2+(\vec{p}\cdot\vec{a})(\vec{p}\cdot\vec{b})+(\vec{p}\cdot\vec{b})^2\}.
\end{aligned}
$$

また $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （s，t は実数）とすると，
$|\vec{p}|=R$ より

$$|\vec{p}|^2=R^2$$

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$$s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=R^2$$
$$R^2s^2-stR^2+R^2t^2=R^2$$
$$s^2+st+t^2=1.$$

よって

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=R^2s-\frac{R^2}{2}t=R^2\left(s-\frac{t}{2}\right),$$
$$\vec{p}\cdot\vec{b}=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=R^2t-\frac{R^2}{2}s=R^2\left(t-\frac{s}{2}\right)$$

より

$$(\vec{p}\cdot\vec{a})^2+(\vec{p}\cdot\vec{a})(\vec{p}\cdot\vec{b})+(\vec{p}\cdot\vec{b})^2$$
$$=R^4\left\{\left(s-\frac{t}{2}\right)^2+\left(s-\frac{t}{2}\right)\left(t-\frac{s}{2}\right)+\left(t-\frac{s}{2}\right)^2\right\}$$
$$=R^4\left(\frac{3}{4}s^2-\frac{3}{4}st+\frac{3}{4}t^2\right)$$
$$=\frac{3}{4}R^4(s^2-st+t^2)=\frac{3}{4}R^4.$$

よって

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$
$$=12R^4+4\cdot2\cdot\frac{3}{4}R^4=18R^4.$$ 答

別解 その 3

四角形 A，B，C，P を平行移動・回転移動・線対称移動しても辺の長さは変わらないので，

△ABC の外心を原点とし

$$\mathrm{A}(R,\ 0),\ \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}R,\ \frac{\sqrt{3}}{2}R\right),$$
$$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}R,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R\right),$$
$$\mathrm{P}(R\cos\theta,\ R\sin\theta)\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

としてよい．

$$\frac{1}{R^2}(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)$$
$$=\ (\cos\theta-1)^2+\sin\theta^2$$
$$+\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$+\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$=\ 2-2\cos\theta$$
$$+2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$$
$$+2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=6$$

より

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=6R^2.$$ 答

さらに

$$\frac{1}{R^2}(\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4)$$
$$=\ (2-2\cos\theta)^2$$
$$+(2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)^2$$
$$+(2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2$$
$$=\ 4-8\cos\theta+4\cos^2\theta$$
$$+(2+\cos\theta)^2-2\sqrt{3}\sin\theta(2+\cos\theta)+3\sin^2\theta$$
$$+(2+\cos\theta)^2+2\sqrt{3}\sin\theta(2+\cos\theta)+3\sin^2\theta$$
$$=12+6\cos^2\theta+6\sin^2\theta$$
$$=18$$

より

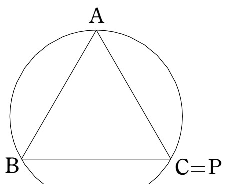
$$\frac{1}{R^2}(\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4)=18R^4.$$ 答

別解 その 4

正弦定理より

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=2R\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}R.$$

(ア)　点 P が△ABC の頂点と一致するとき

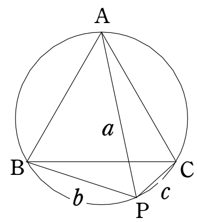


P が C と一致したとしてよい．

このとき

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$
$$=(\sqrt{3}R)^2+(\sqrt{3}R)^2+0$$
$$=6R^2,$$
$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$
$$=(\sqrt{3}R)^4+(\sqrt{3}R)^4+0$$
$$=18R^4.$$

(イ)　点 P が△ABC の頂点と一致しないとき



P が劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上にあるとしてよい．

PA$=a$,

PB$=b$,

PC$=c$

とする．

トレミーの定理より

$$a\cdot\sqrt{3}R=\sqrt{3}R\cdot b+\sqrt{3}R\cdot c$$
$$a=b+c.$$

また四角形 ABPC は円に内接するので

$$\angle\mathrm{BPC}=\pi-\angle\mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$$

ゆえ，△BPC において余弦定理より

$$(\sqrt{3}R)^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$b^2+c^2+bc=3R^2.$$

よって

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$
$$=a^2+b^2+c^2$$
$$=(b+c)^2+b^2+c^2$$

$=2(b^2+bc+c^2)=6R^2$． 答

また

$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$

$=a^4+b^4+c^4$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=36R^2-2\{a^2(b^2+c^2)+b^2c^2\}$

$=36R^2-2\{(b+c)^2(b^2+c^2)+b^2c^2\}$

$=36R^2-2(b^4+2b^3c+3b^2c^2+2bc^3+c^4)$

$=36R^2-2(b^2+c^2+bc)^2$

$=36R^4-2(6R)^2=18R^4$． 答

参考

（イ）での $a=b+c$ は有名．
トレミーの定理に気づけなければ，△ABP，
△APC に余弦定理を用いて

$a^2+b^2-ab=3R^2$,

$a^2+c^2-ac=3R^2$

より辺々引いて

$b^2-c^2-a(b-c)=0$

$(b-c)(b+c-a)=0$

$b=c$　または　$a=b+c$

として場合分けすれば何とかなる．
また初等幾何的には，線分 PB を $(b+c):c$ に外分する点を E とすると，△EAB≡△PAC より
△EAP が正三角形から $a=b+c$ が言える．

【配点例】（60点）

(1)(計 20 点)

（ア）$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$,

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=z$ などに $\boxed{10\text{点}}$．

（イ）その後の変形に $\boxed{10\text{点}}$．

(2)(計 40 点)

※解答で示した通り，様々な解法があるので，
解法に応じて適切に採点する．

（ウ）$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=6R^2$ までに $\boxed{20\text{点}}$．
※結論だけなら $\boxed{5\text{点}}$．

（エ）$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4=18R^4$ までに $\boxed{20\text{点}}$．
※結論だけなら $\boxed{5\text{点}}$．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$\boxed{3}$

座標空間に 5 点

O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(0, 3, 0),
C(0, 0, 4), P(0, 0, −2)

をとる．さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 Q(a, 0, 0) と R(0, b, 0)を考える．

(1) 点 P，Q，R を通る平面を H とする．平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ．

(2) 点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ．

【難易度】

(1) やや易　(2) やや難

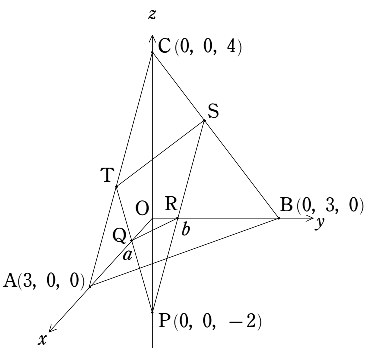
【講評】

(1) は，平面の方程式の知識が使えるが，使わなくても簡単に解ける．

(2) は，方べきの定理の逆以外の方針だと，計算量が多くやり切れないだろう．

解答

(1)



平面 H と平面 $y=0$ の交線は直線 PQ であるから，点 T は直線 PQ と直線 AC の交点である．同様に，平面 H と平面 $x=0$ の交線は直線 PS であるから，点 S は直線 PR と直線 BC の交点である．……(＊)

点T が直線 PQ 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}a\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ak\\0\\-2+2k\end{pmatrix}.$$

また点 T が直線 AC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\begin{pmatrix}3-3t\\0\\4t\end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{cases}ak=3-3t\\-2+2k=4t\end{cases}$$

から　$k=\dfrac{9a}{2a+3}$，$t=\dfrac{-a+3}{2a+3}$.

よって

Tの座標は $\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{-4a+12}{2a+3}\right)$. 答

対称性より

Sの座標は $\left(0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{-4b+12}{2b+3}\right)$. 答

別解　その 1

(＊) まで同じ．

△OPQ と直線 AC において，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{QT}}=1$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3-a}{3}\cdot\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{QT}}=1$$

から

$$\mathrm{TP}:\mathrm{QT}=9:(6-2a)$$

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PT}=\{9-(6-2a)\}:9=(2a+3):9$$

ゆえ

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\frac{9}{2a+3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$，以下略.

別解　その 2

(＊) まで同じ．

直線 PQ の方程式は $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{-2}=1,\\ y=0\end{cases}$

直線 AC の方程式は $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=1.\\ y=0\end{cases}$

これを連立して

$$x=\frac{9a}{2a+3},\quad y=0,\quad z=\frac{-4a+12}{2a+3}.$$

以下略.

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

(2)　(1) より点 T は直線 PQ 上にあり，点 S は直線 PR 上にあるから，4 点 Q，R，S，T が同一円周上にあるための条件は，方べきの定理の逆より

$$|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PT}|=|\overrightarrow{PR}||\overrightarrow{PS}|. \quad \cdots\cdots①$$

(1) の経過より

$$|\overrightarrow{PT}|=\frac{9}{2a+3}|\overrightarrow{PQ}|,\ |\overrightarrow{PR}|=\frac{9}{2b+3}|\overrightarrow{PS}|.$$

①より

$$\frac{9}{2a+3}|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{9}{2b+3}|\overrightarrow{PS}|^2$$

$$(a^2+4)(2b+3)=(b^2+4)(2a+3)$$

$$2a^2b+3a^2+8b+12=2ab^2+3b^2+8a+12$$

$$2ab(a-b)+3(a+b)(a-b)-8(a-b)=0$$

$$(a-b)\{2ab+3(a+b)-8\}=0$$

$$(a-b)\{(2a+3)b-(8-3a)\}=0$$

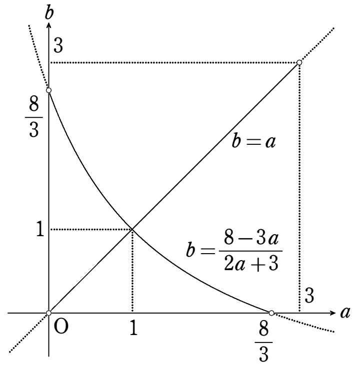
から求める条件は

$$a=b \quad \text{または} \quad b=\frac{8-3a}{2a+3}.$$ 答

ここで

$$\frac{8-3a}{2a+3}=\frac{25}{4}\cdot\frac{1}{a+\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}$$

より，$(a,\ b)$ を図示すると以下の通り．答



【配点例】(60点)

(1)(計 20 点)

(ア)　T の座標までに $\boxed{15\text{点}}$．

(イ)　S の座標に $\boxed{5\text{点}}$．

(2)(計 40 点)

(ウ)　①に $\boxed{15\text{点}}$．

(エ)　$(a-b)\{2ab+3(a+b)-8\}=0$ に $\boxed{15\text{点}}$．

※ $a=b$ があれば $\boxed{5\text{点}}$．

(オ)　$(a,\ b)$ の図示に $\boxed{10\text{点}}$．

4

n を正の奇数とする．
曲線 $y=\sin x$ ($(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$) と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x+y=0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させて出来る回転体を V_n とする．

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x, \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．

(2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

【難易度】

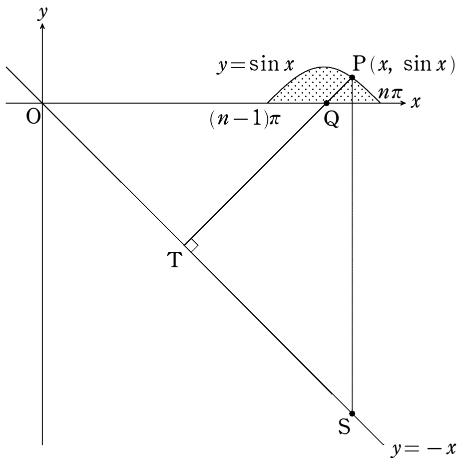
(1) やや易　(2) 標準

【講評】

斜軸回転と呼ばれる定形問題．これは外せない．なお，(1) の P は $(x, \sin x)$ となっているが，これだと受験生は解きにくい．$(t, \sin t)$ などの配慮がほしかったところ．

解答

(1) n が奇数より，D_n は以下の打点部．



S$(x, -x)$ とする．また，直線 PQ と ℓ の交点を T とすると

$$\mathrm{OS}=\sqrt{2}\,x,\quad \mathrm{PS}=x+\sin x,$$

$$\mathrm{ST}=\mathrm{PT}=\frac{\mathrm{PS}}{\sqrt{2}}=\frac{x+\sin x}{\sqrt{2}},$$

$$\mathrm{OT}=\mathrm{QT}=\mathrm{OS}-\mathrm{ST}=\frac{x-\sin x}{\sqrt{2}}.$$

よって求める図形の面積は

$$\pi(\mathrm{PT}^2-\mathrm{QT}^2)$$
$$=\pi\left\{\frac{(x+\sin x)^2}{2}-\frac{(x-\sin x)^2}{2}\right\}=2\pi x\sin x.\ \text{答}$$

(2) $\mathrm{OT}=t$ とすると

$$t=\frac{x-\sin x}{\sqrt{2}}\quad \text{から}\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}\geqq 0.$$

よって x が増加するとき t も増加するので，P を通り ℓ に垂直な直線は $y=\sin x$ と 2 つ以上の共有点を持つことはなく

$$V_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(2\pi x\sin x)\frac{dt}{dx}dx$$
$$=\sqrt{2}\,\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)dx.$$

ここで n が奇数であることに留意し

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)dx$$
$$=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x(\sin x-\sin x\cos x)dx$$
$$=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$
$$=\left[\begin{array}{l} x\left(-\cos x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\right) \\ -\left(-\sin x+\dfrac{1}{8}\sin 2x\right)\end{array}\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$
$$=n\pi\left(1+\frac{1}{4}\right)-(n-1)\pi\left(-1+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{8n-3}{4}\pi.$$

ゆえに

$$V_n=\frac{(8n-3)\pi^2}{2\sqrt{2}}.\ \text{答}$$

【配点例】(60点)

(1)(計 20 点)

（ア）$\mathrm{PT}=\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{2}}$ に $\boxed{5\text{点}}$．

（イ）$\mathrm{QT}=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$ に $\boxed{5\text{点}}$．

（ウ）結論に $\boxed{10\text{点}}$．

(2)(計 40 点)

（エ）$\dfrac{d}{dx}\mathrm{OT}\geqq 0$ に $\boxed{5\text{点}}$．

（オ）$V_n=\sqrt{2}\,\pi\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)dx$ に $\boxed{15\text{点}}$．

（オ）結論に $\boxed{20\text{点}}$．

※東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEPが独自に作成したものです．

5

k を正の整数とし，$a_k=\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ とおく．

(1)　a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ．

(2)　k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ．

(3)　(2)の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列 $\{k^m a_k-k^n A\}$ が 0 ではない値に収束する整数 m，n $(m>n\geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値 B を求めよ．

(4)　(2)と(3)の極限値 A，B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列 $\{k^p a_k-k^q A-k^r B\}$ が 0 ではない値に収束する整数 p，q，r $(p>q>r\geqq 1)$ を求めよ．またそのときの極限値を求めよ．

【難易度】

(1) やや易　(2) 標準　(3) やや難　(4) 難

【講評】

(1)は部分積分して漸化式を作る典型問題．(2)は，東工大頻出の評価と極限．これを取れれば合格圏．(3)も東工大頻出のテーマだが，かなりの難問．(4)は試験場での解答は無理だろう．

解答

(1)　a_{k+2}

$$=\int_0^1 x^{k+1}\sin\frac{\pi x}{2}dx$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}x^{k+1}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{4}{\pi^2}(k+1)x^k\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^1$$

$$-\frac{4}{\pi^2}(k+1)\int_0^1 x^{k-1}\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{4}{\pi^2}(k+1)-\frac{4}{\pi^2}k(k+1)a_k$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}(k+1)(ka_k-1).\ 答 \quad\cdots\cdots①$$

(2)　①より

$$ka_k=-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{a_{k+2}}{k+1}+1. \quad\cdots\cdots②$$

また，$0<x<1$ において

$$0<x^{k+1}\sin\frac{\pi x}{2}<x^{k+1}$$

より

$$0<\int_0^1 x^{k+1}\sin\frac{\pi x}{2}dx<\int_0^1 x^{k+1}dx$$

$$0<a_{k+2}<\left[\frac{x^{k+2}}{k+2}\right]_0^1=\frac{1}{k+2}$$

$$0<\frac{a_{k+2}}{k+1}<\frac{1}{(k+2)(k+1)}.$$

$k\to\infty$ とすると

$$\frac{1}{(k+2)(k+1)}\to 0 \text{ より } \frac{a_{k+2}}{k+1}\to 0.$$

よって②より　$A=\lim_{k\to\infty}ka_k=1$．答

(3)　①より

$$(k+2)a_{k+2}=-\frac{4}{\pi^2}(k+2)(k+1)(ka_k-1)$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{(k+2)(k+1)}{k^2}(k^3a_k-k^2).$$

$b_k=k^3a_k-k^2$ とおくと

$$b_k=-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)}\cdot(k+2)a_{k+2}.$$

(2)より $\lim_{k\to\infty}(k+2)a_{k+2}=1$ ゆえ

$$\lim_{k\to\infty}b_k=-\frac{\pi^2}{4}\cdot 1\cdot 1=-\frac{\pi^2}{4}.$$

また

$$k^m a_k-k^n A$$

$$=k^{m-3}b_k+k^{m-1}-k^n \quad\cdots\cdots③$$

$$=k^{m-1}\left(\frac{b_k}{k^2}+1-k^{-m+n+1}\right). \quad\cdots\cdots④$$

ここで

$m>n\geqq 1$ より $m\geqq 2$ つまり $\lim_{k\to\infty}k^{m-1}=\infty$，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{k^2}=0$$

から，④が収束する必要条件は

$\lim_{k\to\infty}k^{-m+n+1}=1$　つまり　$-m+n+1=0$

より　$m=n+1$　である．

この下で　③$=k^{n-2}b_k$．

$\lim_{k\to\infty}b_k=-\frac{\pi^2}{4}$ より，$k^m a_k-k^n A$ が 0 でない値に収束するのは

$n-2=0$　つまり　$(m,\ n)=(3,\ 2)$

のときに限り，その極限値は

$$B=1\cdot\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)=-\frac{\pi^2}{4}.\ 答$$

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

(4)　$b_{k+2}=(k+2)^3a_{k+2}-(k+2)^2$

$$=-\frac{4}{\pi^2}(k+2)^3(k+1)(ka_k-1)-(k+2)^2$$

（①より）

から $k+2\neq 0$ より

$$\frac{b_{k+2}}{k+2}=-\frac{4}{\pi^2}(k+2)^2(k+1)(ka_k-1)-(k+2)$$

ゆえ

$$(k+2)^2(k+1)(ka_k-1)+\frac{\pi^2}{4}(k+2)$$

$$=-\frac{\pi^2b_{k+2}}{4(k+2)}.\quad\cdots\cdots⑤$$

ここで

⑤の左辺

$$=(k^3+5k^2+8k+4)(ka_k-1)+\frac{\pi^2}{4}(k+2)$$

$$=\left(k^4a_k-k^3+\frac{\pi^2}{4}k\right)+\frac{5k^2+8k+4}{k^2}b_k+\frac{\pi^2}{2}.$$

さらに $c_k=k^4a_k-k^3+\dfrac{\pi^2}{4}k$ とおくと，⑤より

$$c_k=-\left(5+\frac{8}{k}+\frac{4}{k^2}\right)b_k-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2b_{k+2}}{4(k+2)},$$

$$\lim_{k\to\infty}c_k=-5\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)-\frac{\pi^2}{2}-0=\frac{3}{4}\pi^2.$$

また

$$k^pa_k-k^qA-k^rB$$

$$=\quad k^{p-4}\left(k^4a_k-k^3+\frac{\pi^2}{4}k\right)$$

$$+k^{p-1}-\frac{\pi^2}{4}k^{p-3}-k^q\cdot 1-k^r\cdot\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$=k^{p-4}c_k+(k^{p-1}-k^q)-\frac{\pi^2}{4}(k^{p-3}-k^r)\quad\cdots\cdots⑥$$

$$=k^{p-1}\left\{\frac{c_k}{k^3}+1-k^{q-p+1}-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{k^2}-k^{r-p+1}\right)\right\}.$$

……⑦

ここで

$p>q>r\geqq 1$ より $p\geqq 3$,

$p>q>r$ より $p\geqq r+2$ つまり $r-p+1<0$

より

$$\lim_{k\to\infty}k^{p-1}=\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{c_k}{k^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}=\lim_{k\to\infty}k^{r-p+1}=0$$

から，⑦が収束する必要条件は

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}k^{q-p+1}=1$　つまり　$q-p+1=0$

より　$q=p-1$ である．

この下で

$$⑥=k^{p-4}c_k-\frac{\pi^2}{4}(k^{p-3}-k^r).\quad\cdots\cdots⑧$$

（ア）　$p-3>r$ のとき

$$⑧=k^{p-3}\left\{\frac{c_k}{k}-\frac{\pi^2}{4}(1-k^{-p+r+3})\right\}.$$

$p-3>r\geqq 1$ より $p>4$，$-p+r+3<0$ より

$$\lim_{k\to\infty}k^{p-3}=\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{c_k}{k}-\frac{\pi^2}{4}(1-k^{-p+r+3})\right\}=-\frac{\pi^2}{4}$$

より⑧は発散する．

（イ）　$p-3=r$ のとき

$$⑧=k^{p-4}c_k.$$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}c_k=\frac{3}{4}\pi^2$ より，⑧が 0 でない値に収束するのは $p=4$ つまり $q=3$，$r=1$ のときに限り，このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty}⑧=\frac{3}{4}\pi^2$.

（ウ）　$p-3<r$ のとき

$$⑧=k^r\left\{k^{p-r-4}c_k-\frac{\pi^2}{4}(k^{p-r-3}-1)\right\}.$$

$p-3<r$ つまり $p-r+3<0$ より

$$\lim_{k\to\infty}\left\{k^{p-r-4}c_k-\frac{\pi^2}{4}(k^{p-r-3}-1)\right\}=\frac{\pi^2}{4}$$

であり，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}k^r=\infty$ より⑧は発散する．

以上より，$k^pa_k-k^qA-k^rB$ が 0 でない値に収束するのは $p=4$，$q=3$，$r=1$ のときに限り，

その極限値は　$C=\dfrac{3}{4}\pi^2$．答

【配点例】（60点）

(1)(計 5 点)

（ア）　結論に $\boxed{5点}$．

(2)(計 15 点)

（イ）　②に相当する変形に $\boxed{5点}$．

（ウ）　a_{k+2} あるいは a_k の不等式に $\boxed{5点}$．

（エ）　$A=1$ に $\boxed{5点}$（結論のみでも OK）．

(3)(計 20 点)

（オ）　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}(k^3a_k-k^2)=-\frac{4}{\pi^2}$ までに $\boxed{10点}$．

（カ）　$m=3$, $n=2$ の必要性の議論に $\boxed{10点}$．

(4)(計 20 点)

（キ）　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(k^4a_k-k^3+\frac{\pi^2}{4}k\right)=\frac{3}{4}\pi^2$ までに $\boxed{10点}$．

（ク）　$p=4$，$q=3$，$r=1$ の必要性の議論に $\boxed{10点}$．