※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

問題一覧

1

(1)　$h>0$ とする．座標平面上の点O$(0,\ 0)$，点P$(h,\ s)$，点Q$(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし，$s<t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの $s,\ t$ の値を求めよ．

(2)　四面体ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，辺 AD，BD，CD の長さを $\ell,\ m,\ n$ とする．このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体ABCDがどのような四面体のときか答えよ．

2

次の等式が $1\leqq x\leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 $A,\ B$ を求めよ．

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x-1)+A+\frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1\leqq x\leqq 2$ に対して定義される連続関数とする．

3

i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1)　原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10\leqq N(r)<25\}$ を求めよ．

(2)　複素数平面の相異なる 2 点 $z,\ w$ を結ぶ線分を $L(z,\ w)$で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1, 1+\dfrac{i}{2}\right)$, $L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$, $L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$, $L(i, 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

→解答例は 3 ページから．

4

$H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする．$H_1, \cdots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$.
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$.
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$.
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$

である．

(1)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち2番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち3番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

5

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．

(1)　関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ．

(2)　数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ．

→解答例は 3 ページから．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

1

(1)　$h>0$ とする．座標平面上の点O$(0,\ 0)$，点P$(h,\ s)$，点Q$(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし，$s<t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの s，t の値を求めよ．

(2)　四面体ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，辺 AD，BD，CD の長さを ℓ，m，n とする．このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体ABCDがどのような四面体のときか答えよ．

【難易度】

(1) やや難　　(2) 標準

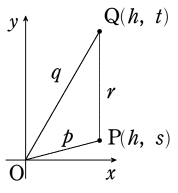
【講評】

(1) は，1 文字について平方完成するだけだが，実際の出来は非常に芳しくない．(1) が解けなくても，諦めずに (2) を解いて部分点をもぎ取ろう．

【解答例】

(1)

$$p^2=h^2+s^2,$$
$$q^2=h^2+t^2,$$
$$r^2=(t-s)^2,$$
$$S=\frac{1}{2}(t-s)h$$



より

$$\begin{aligned}
&p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}\,S\\
&=2(h^2+s^2+t^2)-2st-2\sqrt{3}(t-s)h\\
&=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2(s^2+t^2-st)\\
&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+2(s^2+t^2-st)\\
&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{s^2+2st+t^2}{2}\\
&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{(s+t)^2}{2}\geqq 0.
\end{aligned}$$ 終

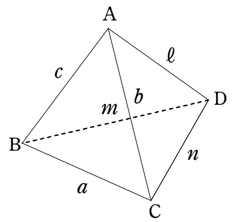
この等号は

$$\begin{cases} h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=0 \\ s+t=0 \end{cases}$$

つまり　$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$　答

のときに成立する．

(2)　任意の三角形は，1 つの頂点を原点に重ね，その頂点の対辺を y 軸に平行に $x>0$ の領域に配置するように移動できるので，(1) の不等式は任意の三角形について成り立つ．



(1) より

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{ABC}, \quad \cdots\cdots①$$
$$c^2+m^2+\ell^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{ABD}, \quad \cdots\cdots②$$
$$b^2+\ell^2+n^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{ACD}, \quad \cdots\cdots③$$
$$a^2+m^2+n^2 \geqq 4\sqrt{3}\,\triangle\mathrm{BCD}. \quad \cdots\cdots④$$

これらを加えて

$$2(a^2+b^2+c^2+m^2+n^2+\ell^2) \geqq 4\sqrt{3}\,T$$
$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T. \quad \cdots\cdots⑤$$ 終

⑤の等号が成立するのは，①～④の等号がすべて成立するときである．

(1) の不等式の等号が成立するとき，辺 PQ の中点を M とすると OM⊥PQ，OM:MQ$=\sqrt{3}:1$ より △OPQ は正三角形のときであるから，⑤の等号が成立するのは，各三角形がすべて正三角形のとき，すなわち四面体 ABCD が正四面体のときである．答

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

【配点例】（60点）

※東工大の数学の配点は，例年 5 点刻みと予想される．

（なぜなら，数学の開示得点が常に５の倍数）．

(1)(計 30 点)

（ア）　$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S$

$=2(h^2+s^2+t^2)-2st-2\sqrt{3}(t-s)h$

までに $\boxed{10\text{点}}$．

（イ）　$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S$

$=2\left\{h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\dfrac{(s+t)^2}{2}\geqq 0$

までに $\boxed{10\text{点}}$．

（ウ）　$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ に $\boxed{10\text{点}}$．

(2)(計 30 点)

（エ）　①～④から⑤を導いて $\boxed{10\text{点}}$．

（オ）　$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ から △OPQ が正三角形になることに触れて $\boxed{10\text{点}}$．

※もちろん (1) で触れても OK．

（カ）　四面体 ABCD が正四面体のときに等号が成立することを示して $\boxed{10\text{点}}$．

2

次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A，B を求めよ．

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし， $f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする．

【難易度】 難

【講評】 多くの要素が詰め込まれた問題．計算量が膨大で，試験場での完答は厳しい．ただし，置換積分で形を整える・絶対値つき定積分の処理など，東工大頻出の要素が入っているので，復習はしっかりと行いたい．

解答

$I = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy$ において $xy = t$ とすると $y = \dfrac{t}{x}$ つまり $dy = \dfrac{dt}{x}$ から

$$I = \int_1^2 \left| \log \frac{t}{x} \right| f(t) \frac{dt}{x} = \frac{1}{x} \int_1^2 |\log t - \log x| f(t) dt.$$

y	$\frac{1}{x}$	$\to$	$\frac{2}{x}$
t	1	$\to$	2

ここで $1 \leqq t \leqq x$ のとき $\log t - \log x \leqq 0$，$x \leqq t \leqq 2$ のとき $\log t - \log x \geqq 0$ より

$$xI = -\int_1^x (\log t - \log x) f(t) dt + \int_x^2 (\log t - \log x) f(t) dt$$

$$= \log x \left\{ \int_1^x f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \right\} - \int_1^x f(t) \log t\, dt - \int_2^x f(t) \log t\, dt.$$

ここで，$f(t)$，$(\log t) f(t)$ の不定積分の 1 つをそれぞれ $F(t)$，$G(t)$ とすると

$$xI = \log x \{2F(x) - F(1) - F(2)\} - 2G(x) + G(1) + G(2).$$

よって与式を x 倍したものは

$$\log x \{2F(x) - F(1) - F(2)\} - 2G(x) + G(1) + G(2) = 3x^2 \log x - 3x^2 + Ax + B \quad \cdots\cdots ①$$

と同値．

① の両辺を x で微分したものを同値変形し

$$\frac{1}{x}\{2F(x) - F(1) - F(2)\} + 2f(x)\log x - 2f(x)\log x = 3\left\{2x(\log x - 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right\} + A$$

$$\frac{1}{x}\{2F(x) - F(1) - F(2)\} = 6x\log x - 3x + A$$

$$2F(x) - F(1) - F(2) = 6x^2 \log x - 3x^2 + Ax. \quad \cdots\cdots ②$$

② の両辺を x で微分したものを同値変形し

$$2f(x)=6\left(2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)-6x+A=12x\log x+A$$

$$f(x)=6x\log x+\frac{A}{2}.$$

②に $x=1,\ 2$ を代入し

$$F(1)-F(2)=-3+A, \quad \cdots\cdots③$$

$$F(2)-F(1)=6\log 2-12+2A.$$

これらを加えて

$$0=6\log 2-15+3A \quad \text{より} \quad A=5-8\log 2.$$

①に $x=1,\ 2$ を代入し

$$G(2)-G(1)=A+B-3,$$

$$\log 2\{F(2)-F(1)\}+G(1)-G(2)=2A+B+12\log 2-12.$$

これを加えて

$$\log 2\{F(2)-F(1)\}=3A+2B+12\log 2-15$$

より，④も用いて

$$B=\frac{1}{2}\log 2(3-A)-\frac{3}{2}A-6\log 2+\frac{15}{2}.$$

以上より　$f(x)=6x\log x+\dfrac{5}{2}-4\log 2$，$A=5-8\log 2$，$B=4(\log 2)^2+5\log 2$．答

【配点例】(60点)

(ア)　$xy=t$ の置換に $\boxed{10点}$．

(イ)　$\displaystyle\int_1^2|\log t-\log x|f(t)dt=-\int_1^x(\log t-\log x)f(t)dt+\int_x^2(\log t-\log x)f(t)dt$ に $\boxed{10点}$．

(ウ)　②に相当する部分に $\boxed{10点}$．

(エ)　A の値を求めるまでに $\boxed{15点}$．　　(オ)　B の値を求めるまでに $\boxed{15点}$．

参考

上の解答例では，必要条件を求めているように見えるが，実は必要十分条件になっている．それを理解するには，以下の定理がヒントになる．ぜひ考えてみよう．

定理　$f(x)$，$g(x)$ を微分可能な関数とすると，

「任意の x で $f(x)=g(x)$ 」

$\Longleftrightarrow$ 「任意の x で $f'(x)=g'(x)$ 」かつ「ある k について $f(k)=g(k)$」

3

i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

(1)　原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ．

(2)　複素数平面の相異なる 2 点 z, w を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$, $L\left(1, 1+\dfrac{i}{2}\right)$, $L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$, $L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$, $L(i, 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

【難易度】

(1) やや難　　(2) やや難

【講評】

「$\dfrac{z}{3+2i}$　が何を意味するかがわかってしまえば，後は単純作業で，答案の書き方に苦労する程度でそれほど難しいところはない」と言いたいところだが，生徒にやらせてみると，東工大志望者も大苦戦している．

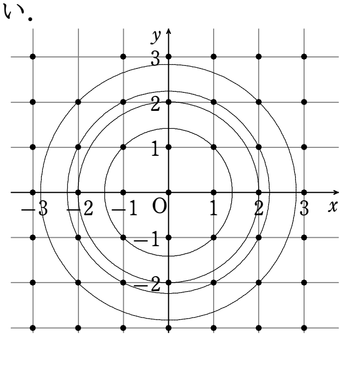
【解答例】

(1)　$z=x+yi$（x, y は整数）とする．

「$\left|\dfrac{z}{3+2i}\right|$ が原点を中心とする半径 r の周または内部にある」

$\iff \left|\dfrac{z}{3+2i}\right| \leqq r \iff |z| \leqq \sqrt{13}\,r$　……①

であるから，$N(r)$ は $|z| \leqq \sqrt{13}\,r$ を満たす z の個数に等しい．



図より

$\sqrt{13}\,r < 2 \iff N(r) \leqq 9$,

$2 \leqq \sqrt{13}\,r < \sqrt{5} \iff N(r) = 13$,

$\sqrt{5} \leqq \sqrt{13}\,r < 2\sqrt{2} \iff N(r) = 21$,

$2\sqrt{2} \leqq \sqrt{13}\,r \iff N(r) \geqq 25$,

より

$10 \leqq N(r) < 25 \iff 2 \leqq \sqrt{13}\,r < 2\sqrt{2}$

から求める集合は　$\dfrac{2}{\sqrt{13}} \leqq r < \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$　答

(2)　$z=x+yi$（x, y は整数）とする．

また，6 つの線分で囲まれる領域を D とする．

変換　$w=\dfrac{z}{3+2i}$　において，w の軌跡は z の軌跡を回転拡大したものである．

$w=\dfrac{z}{3+2i}$　より　$z=(3+2i)w$　であるから

$D'=\{(3+2i)w \mid w \in D\}$

とすると

$\dfrac{z}{3+2i} \in D \iff z \in D'$.

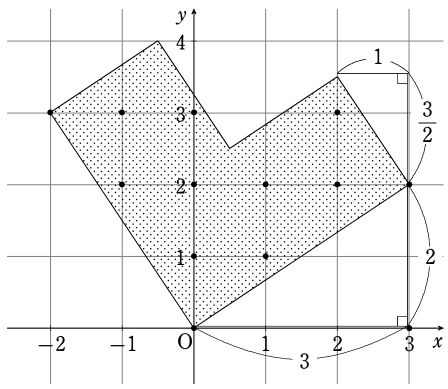
よって，まずは D' を求める．

$z=(3+2i)w$　において

$w=1$　のとき　$z=3+2i$

であり，D と D' は相似であることから，

D' は以下の打点部のようになる (境界を含む).



よって，D' に含まれる z は 12 個．答

【配点例】(60点)

(1)(計 30 点)

(ア)　$|z|\leqq\sqrt{13}\,r$，$|z|=\sqrt{13}\,r$ などに $\boxed{10\text{ 点}}$．

※解法がこの解答と異なる場合でも，その解法が正しければ解法に 10 点を与える．

(イ)　$\dfrac{2}{\sqrt{13}}\leqq r<\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ に $\boxed{20\text{ 点}}$．

※ $\dfrac{2}{\sqrt{13}}\leqq r$ だけ，$r<\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$ だけが正しいものは $\boxed{10\text{ 点}}$．

(2)(計 30 点)

(ウ)　D' を求める方針に $\boxed{5\text{ 点}}$，D' に $\boxed{10\text{ 点}}$．

※解法がこの解答と異なる場合でも，その解法が正しければ解法に 15 点を与える．

(エ)　結論に $\boxed{15\text{ 点}}$．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

4

$H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする．$H_1, \cdots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$.
- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$.
- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$.
- ●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$

である．

(1)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ．

(2)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち2番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3)　各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち3番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

【難易度】

(1) やや難　　(2) 難　　(2) 難

【講評】

(1) は「平面を直線で分割する」有名問題ではあるものの，誘導がなく厳しい．(2) はさらに難しく，(3) は超がつく難問で，解答用紙に収めることすら困難．(1) だけ復習しておけば十分．

【解答例】

(1)　まず，平面 P を直線 $\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \cdots,\ \ell_n$ で分割する (直線は一致してもよい) とき，その分割された領域の個数を $U(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ と表す．

次に，$U(\ell_1, \cdots, \ell_k)$ に対し $U(\ell_1, \cdots, \ell_k, \ell_{k+1})$ を考える．ℓ_{k+1} を P に書き加えることにより，ℓ_{k+1} は $\ell_1, \cdots, \ell_k$ と最大 k 個の交点を持つので，ℓ_{k+1} は最大 $(k+1)$ 個の区間に分割されるので

$$U(\ell_1, \cdots, \ell_k, \ell_{k+1}) - U(\ell_1, \cdots, \ell_k) \leqq k+1. \quad \cdots\cdots①$$

これを　$k=1$　から　$k=n-1$ まで加えると，$n \geqq 2$ において

$$U(\ell_1, \cdots, \ell_n) - U(\ell_1) \leqq 2+3+\cdots+n$$

より，$U(\ell_1)=2$ もあわせて

$$U(\ell_1, \cdots, \ell_n) \leqq \frac{1}{2}(n^2+n+2).$$

この等号は，$\ell_1, \cdots, \ell_n$ のいずれもが平行でなく，3 本以上が 1 点で交わらないときに起こる．

よって $U(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ の最大値は $\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$ であり，これは　$n=1$　でも成り立つ．

次に，n 本以下の直線で平面 P を分割するときの領域の個数の最大値を a_n とすると，

$\left\{\dfrac{1}{2}(n^2+n+2)\right\}$ が単調増加数列であることから

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

である．

次に，$T(H_1, \cdots, H_k)$ に対し $T(H_1, \cdots, H_k,\ H_{k+1})$ を考える．H_{k+1} を加えることにより，H_{k+1} は $H_1, \cdots, H_k$ と最大 k 個の交線を持つので，H_{k+1} は最大 a_k 個の区間に分割される．よって

$$T(H_1, \cdots, H_k,\ H_{k+1}) - T(H_1, \cdots, H_k) \leqq a_k. \quad \cdots\cdots②$$

②を　$k=1$　から　$k=n-1$ まで加えると，$n \geqq 2$ において

$$T(H_1, \cdots, H_n) - T(H_1) \leqq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

より　$T(H_1)=2$　から

$$T(H_1, \cdots, H_n) \leqq \frac{n^3+5n+6}{6}.$$

この等号は，$H_1,\ H_2,\ \cdots, H_n$ について

「どの 2 面も交線を持ち，その交線がいずれも平行でなく，かつ 3 本以上が 1 点で交わらない」$\cdots\cdots(*)$

ときに起こる

よって $T(H_1, \cdots, H_n)$ の最大値は　$\dfrac{n^3+5n+6}{6}$.

これは $n=1$ でも成り立つ．答

以後，$b_n = \dfrac{n^3+5n+6}{6}$　とする．

(2)　$T(H_1, \cdots, H_n)$ は自然数であるから

$$T(H_1, \cdots, H_n) = b_n - 1 \quad \cdots\cdots③$$

が実現すれば，これが求める値である．

$n=2$ のとき，$H_1 /\!/ H_2$ とすると $T(H_1, H_2)=3$ であり，また　$b_2-1=3$　から③は成り立つ．

次に，$n \geqq 3$　において

※東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEPが独自に作成したものです．

「$H_1,\ H_2,\ \cdots, H_{n-1}$ について $(*)$ が成り立ち」，
「$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ で H_i と H_n が交線 ℓ_i を持ち」，
「$\ell_1, \cdots, \ell_{n-1}$ は3本以上が1点で交わらず」，
「$\ell_1, \cdots, \ell_{n-2}$ のいずれもが平行でなく，$\ell_1 /\!/ \ell_{n-1}$ である」
とすると，(1) の経過より b_n よりも分割数が1だけ小さくなるので③が成立する．

以上より，求める値は　$b_n-1=\dfrac{n^3+5n}{6}$．答

(3)　$T(H_1, \cdots, H_n)$ は自然数であるから

$$T(H_1, \cdots, H_n)=b_n-2 \quad \cdots\cdots④$$

が実現すれば，これが求める値である．
$n=3$ のとき，$H_1 /\!/ H_2 \not\!/\!/ H_3$ とすると
$T(H_1, H_2, H_3)=6$　であり，また　$b_3-2=6$
から④は成り立つ．
次に，$n \geqq 5$　において
「$H_1,\ H_2,\ \cdots, H_{n-1}$ について $(*)$ が成り立ち」，
「$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ で H_i と H_n が交線 ℓ_i を持ち」，
「$\ell_1, \cdots, \ell_{n-1}$ は3本以上が1点で交わらず」，
「$\ell_1, \cdots, \ell_{n-3}$ のいずれもが平行でなく，$\ell_{n-2} /\!/ \ell_1 \not\!/\!/ \ell_2 /\!/ \ell_{n-1}$ である」
とする．$\ell_{n-2} /\!/ \ell_1 \not\!/\!/ \ell_2 /\!/ \ell_{n-1}$ は，$n=4$ では成り立たないことに留意する．
このとき，(1) の経過より b_n よりも分割数が2だけ小さくなるので④が成り立つ．
ところが　$n=4$　では④は成り立たない．
証明は後述．

$$T(H_1, \cdots, H_4)=b_4-3$$

すなわち

$$T(H_1, \cdots, H_4)=12$$

は例えば
　$H_1: x=0$，$H_2: y=0$，$H_3: x+y=0$，$H_4: z=0$
で実現可能．

よって　$b_n-2=\dfrac{n^3+5n-6}{6}$　より求める値は

$$\begin{cases} \dfrac{n^3+5n-6}{6} & (n=3,\ n \geqq 5) \\ 12 & (n=4) \end{cases}$$ 答

④が　$n=4$　で成り立たないことの証明：
$b_4-2=13$　より，$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=13$　が成り立たないことを示す．
(1)　と同様に
　(a)　空間を H_1 で区切ると2領域に分割される
　(b)　(a) を H_2 で区切ると領域が c_1 だけ増える
　(c)　(b) を H_3 で区切ると領域が c_2 だけ増える
　(d)　(c) を H_4 で区切ると領域が c_3 だけ増える
とすると

$$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=2+c_1+c_2+c_3$$

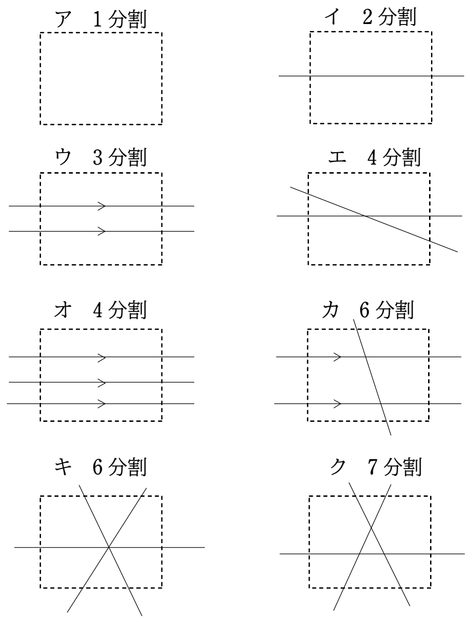
であるから

$$2+c_1+c_2+c_3=13$$

すなわち

$$c_1+c_2+c_3=11 \quad \cdots\cdots⑤$$

を満たす c_1，c_2，c_3 を考える．
P を0～3本の直線で分割する方法を列挙すると以下の通り．ただし点線の長方形は P を表す．



よって，(b)，(c)，(d) で差し込んだ平面の分割の可能性は
　(b) … ア～イ，(c) … ア～エ，(d) … ア～ク
であり，c_1，c_2，c_3 の値域は
　$c_1=1,\ 2,\quad c_2=1,\ 2,\ 3,\ 4,$
　$c_3=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7$
であるから，⑤を満たす可能性があるのは
　$(c_1,\ c_2,\ c_3)=(1,\ 3,\ 7),\ (1,\ 4,\ 6),\ (2,\ 2,\ 7),\ (2,\ 3,\ 6)$
のとき，つまり
　(あ)　(b)：ア，(c)：ウ，(d)：ク
　(い)　(b)：ア，(c)：エ，(d)：カ or キ
　(う)　(b)：イ，(c)：イ，(d)：ク
　(え)　(b)：イ，(c)：ウ，(d)：カ or キ
のときのみである．
(d) でキまたはクが起こるとき，H_1 ～ H_4 はどれも平行ではない．　……⑥

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

(あ) のとき，(b)：ア より $H_1 /\!/ H_2$ であるが，これは⑥と矛盾する．
(い) のとき，(b)：ア より $H_1 /\!/ H_2$ であるが，このとき (c)：エは起きない．
(う) のとき，(b)：イ，(c)：イ より $H_1 /\!/ H_3$ または $H_2 /\!/ H_3$ であるが，これは⑥と矛盾する．

ここで，H_m と H_n の交線を $[m,\ n]$ と表す．
後のために，以下の補題を示す：

補題
異なる 3 つの自然数 $k,\ m,\ n$ および異なる 2 直線 $[k,\ n]$ と $[m,\ n]$ が存在するとき

$$[k,\ n] /\!/ [m,\ n] \Longrightarrow [k,\ n] /\!/ [m,\ n] /\!/ [k,\ m] \quad \cdots\cdots ⑦$$

補題 の **証明**
$[k,\ n] /\!/ [m,\ n]$ より $H_k /\!/ [m,\ n]$．
よって $H_k \cap [m,\ n] = \varnothing$ であり，$[k,\ m] \subset H_k$ より $[k,\ m] \cap [m,\ n] = \varnothing$．
ところで，$[k,\ m] \subset H_m$，$[m,\ n] \subset H_m$ より，
$[k,\ m]$ と $[m,\ n]$ は平行か交わるかのいずれかである．
よって $[k,\ m] /\!/ [m,\ n]$ であるから示された．終

(え) のとき，(c)：ウより $[1,\ 3] /\!/ [2,\ 3]$ がいえるので，⑦より
$[1,\ 2] /\!/ [1,\ 3] /\!/ [2,\ 3]$．　……⑧
よって　$H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \varnothing$．
ところがキが起こるには $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \fallingdotseq \varnothing$ が必要なのでキは起きない．
次にカが起きるかどうかを検証する．
カより $[1,\ 4]$，$[2,\ 4]$，$[3,\ 4]$ の 3 本のうち 2 本だけが平行であるから $[1,\ 4] /\!/ [2,\ 4] \not/\!\!/ [3,\ 4]$ ……⑨
としても一般性を失わない．
⑦と⑨より　$[1,\ 4] /\!/ [2,\ 4] /\!/ [1,\ 2]$．
これと⑧より　$[2,\ 3] /\!/ [2,\ 4]$．
再び⑦より　$[2,\ 3] /\!/ [2,\ 4] /\!/ [3,\ 4]$．
これは⑨と矛盾する．
よってカは起きないので，(え) は起きない．

以上より，④が　$n=4$　で成り立たないことがようやく示された．終

【配点例】(60点)
(1)(計 30 点)

[1]　$a_n = \dfrac{1}{2}(n^2+n+2)$ に相当する部分に $\boxed{10点}$．

[2]　$U(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ が最大になる状況に $\boxed{5点}$．

[3]　$\dfrac{n^3+5n+6}{6}$ に $\boxed{10点}$．

[4]　$T(H_1, \cdots, H_n)$ が最大になる状況に $\boxed{5点}$．

(2)(計 10 点)

[5]　$\dfrac{n^3+5n}{6}$ に $\boxed{5点}$．

[6]　$T(H_1, H_2)=3$ が実現可能であることに $\boxed{5点}$．

(3)(計 20 点)

[7]　$\dfrac{n^3+5n-6}{6}$ に $\boxed{5点}$ ($n \fallingdotseq 4$ に気付いてなくてもよい)．

[8]　$T(H_1, H_2, H_3)=6$ が実現可能であることに $\boxed{5点}$．

[9]　$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=12$ が実現可能であることに $\boxed{5点}$．

[10]　$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=13$ が実現不可能であることに $\boxed{5点}$．

5

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}\qquad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．

(1)　関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ．

(2)　数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ．

【難易度】

(1) やや易　　(2) 標準

【講評】

極めてオーソドックスな頻出問題．

【解答例】

(1)　$x>0$ を前提とする．

$$\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\}'=\left\{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}'$$
$$=\{\log(x+1)-\log x\}'$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(x+1)}$$

より

$$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\cdot\left\{-\frac{1}{x(x+1)}\right\}$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x},$$
$$f''(x)=-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{-x+(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0.$$

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ から $f'(x)<0$. 終

(2)　$k\geqq 2$ として，$b_{k-1}<b_k$ を同値変形すると

$$\frac{k^k}{a^{k-1}(k-1)!}<\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}$$
$$a<\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}}$$
$$a<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$
$$\log a<(k+1)\log\left(1+\frac{1}{k}\right).\ （両辺>0 より）$$

また

$$\log a=4\log\frac{4}{3}=(3+1)\log\left(1+\frac{1}{3}\right)=f(3)$$

であり，(1) より $f(x)$ は $x>0$ で単調減少であるから

$$b_{k-1}<b_k \iff f(3)<f(k) \iff k<3.$$

よって　b_{k-1} と b_k の大小は k と 3 の大小に一致するので

$$b_{k-1}<b_k \iff k=1,\ 2$$
$$b_{k-1}=b_k \iff k=3$$
$$b_{k-1}>b_k \iff k\geqq 4$$

ゆえ

$$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots$$

であるから，$b_k=M$ となるのは $k=2,\ 3$. 答

また

$$M=b_2$$
$$=\frac{3^3}{a^2\cdot 2!}=\frac{3^8}{2^{16}}\cdot\frac{3^3}{2}=\frac{3^{11}}{2^{17}}=\frac{177147}{131072}\quad 答$$

【配点例】(60点)

(1)(計 15 点)

（ア）　$f''(x)=\dfrac{1}{x^2(x+1)}>0$ に $\boxed{10点}$.

（イ）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ に $\boxed{5点}$.

(2)(計 45 点)

（ウ）　$b_{k-1}<b_k$，$b_k<b_{k+1}$　などを同値変形する方針，あるいは $\dfrac{b_k}{b_{k-1}}$，$\dfrac{b_{k+1}}{b_k}$，b_k-b_{k-1}，$b_{k+1}-b_k$ を変形する方向に $\boxed{5点}$.

（エ）　$b_{k-1}<b_k \iff f(3)<f(k)$　に $\boxed{20点}$.

（オ）　$b_1<b_2=b_3>b_4>b_5>\cdots$　に $\boxed{10点}$.

（カ）　$k=2,\ 3$　に $\boxed{5点}$.

（キ）　$M=\dfrac{177147}{131072}$　に $\boxed{5点}$.

※ $M=\dfrac{3^{11}}{2^{17}}$ でも OK.