問題一覧

1

xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

2

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする．

$f'(t)=-f(t)g(t)$，$g'(t)=\{f(t)\}^2$，

$f(t)>0$，$|g(t)|<1$，$f(0)=1$，$g(0)=0$．

このとき，

$$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2,\quad q(t)=\log\frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく．

(1) $p'(t)$ を求めよ．

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)$ を求めよ．

(4) $f(T)=g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ $(0\leqq t\leqq T)$ の長さを求めよ．

3

xy 平面上に，点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，C$(-a,\ 0)$ (ただし $0<a<b$) をとる．点 A，B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

(1) 点 A_n，C_n の座標を求めよ．

(2) $\triangle \mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

4

n を正の整数とし，$C_1,\ \cdots,\ C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k=1,\ \cdots,\ n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1-p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1) $p_k=\dfrac{1}{3}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2) $p_k=\dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3) $n=3m$ (m は正の整数) で，$k=1,\ \cdots,\ 3m$ に対して

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{1}{3m} & (k=1,\ \cdots,\ m)\\[2mm] \dfrac{2}{3m} & (k=m+1,\ \cdots,\ 2m)\\[2mm] \dfrac{1}{m} & (k=2m+1,\ \cdots,\ 3m)\end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}Z_{3m}$ を求めよ．

5

整数の組 $(a,\ b)$ に対して 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える．方程式 $f(x)=0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n=1$ となる正の整数 n が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

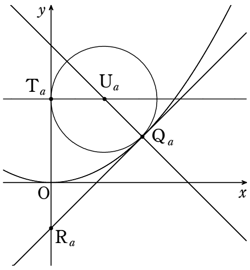
1

xy 平面上の曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく．a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする．

(1) 点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

【解答例】



円 S_a の中心を $\mathrm{U}_a(X,\ Y)$ とし，点 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ を Q_a とする．

Q_a における $y=\frac{1}{2}x^2$ の接線の方程式は

$$y=a(x-a)+\frac{1}{2}a^2 \quad つまり \quad y=ax-\frac{1}{2}a^2.$$

よって，この接線と y 軸の交点を R_a とすると

$$\mathrm{R}_a\left(0,\ -\frac{1}{2}a^2\right).$$

ここで S_a と y 軸の接点を T_a とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_a\mathrm{R}_a&=\mathrm{Q}_a\mathrm{R}_a\\&=\sqrt{(0-a)^2+\left(-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\right)^2}\\&=\sqrt{a^2+a^4}=a\sqrt{a^2+1}\end{aligned}$$

から

$$Y=-\frac{1}{2}a^2+a\sqrt{a^2+1}.$$

また，Q_a における $y=\frac{1}{2}x^2$ の法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{a}(x-a)+\frac{1}{2}a^2 \quad つまり$$
$$y=-\frac{1}{a}x+\left(\frac{1}{2}a^2+1\right).$$

この直線と $y=Y$ の交点が U_a であることから

$$Y=-\frac{1}{a}X+\left(\frac{1}{2}a^2+1\right) \quad より$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}X&=-Y+\left(\frac{1}{2}a^2+1\right)\\&=\frac{1}{2}a^2-a\sqrt{a^2+1}+\left(\frac{1}{2}a^2+1\right)\\&=a^2+1-a\sqrt{a^2+1} \quad から\end{aligned}$$

$$X=a^3+a-a^2\sqrt{a^2+1}.$$

(1) $(X,\ Y)$ に $a=1$ を代入し P の座標は

$$\left(2-\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right) \quad 答$$

(2)
$$\frac{dX}{da}=3a^2+1-\left(2a\sqrt{a^2+1}+a^2\cdot\frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}}\right),$$
$$\frac{dY}{da}=-a+\sqrt{a^2+1}+a\cdot\frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}}$$

から，求める接線の傾きは，$a=1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dX}&=\frac{\frac{dY}{da}}{\frac{dX}{da}}\\&=\frac{-1+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{3+1-\left(2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\\&=\frac{-2+3\sqrt{2}}{8-5\sqrt{2}}\\&=\frac{(-2+3\sqrt{2})(8+5\sqrt{2})}{(8-5\sqrt{2})(8+5\sqrt{2})}\\&=\frac{14\sqrt{2}+14}{14}\\&=\sqrt{2}+1 \quad 答\end{aligned}$$

参考

(1) は，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_a\mathrm{U}_a}$ と $(-a,\ 1)$ が同じ向きであることから，円の半径を r とおくと

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OQ}_a}+\overrightarrow{\mathrm{Q}_a\mathrm{U}_a}\\&=\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)+r\cdot\frac{(-a,\ 1)}{\sqrt{a^2+1}}. \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

この x 成分は r に等しいので

$$a-\frac{ar}{\sqrt{a^2+1}}=r$$
$$r\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)=a$$
$$r(\sqrt{a^2+1}+a)=a\sqrt{a^2+1}$$
$$r=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+a}.$$

このとき，① は点 U_a の位置ベクトルを表すので，P の座標を得ます．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

【配点例】（60点）

(1)(計 30 点)

（ア） 点$\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$における接線と，半径 $\mathrm{Q}_a\mathrm{U}_a$ が垂直であることに $\boxed{5\text{点}}$

（イ） $\mathrm{R}_a\mathrm{Q}_a=\mathrm{R}_a\mathrm{T}_a$ や，方向ベクトル $(-a,\ 1)$ の長さの調節などの方針に $\boxed{5\text{点}}$

（ウ） P の x 座標に $\boxed{10\text{点}}$，y 座標に $\boxed{10\text{点}}$

(2)(計 30 点)

（エ） S_a の x 座標の微分に $\boxed{10\text{点}}$

（オ） S_a の y 座標の微分に $\boxed{10\text{点}}$

（カ） 結論 $\sqrt{2}+1$ に $\boxed{10\text{点}}$

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

$\boxed{2}$

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする．

$$f'(t)=-f(t)g(t),\ \ g'(t)=\{f(t)\}^2,$$
$$f(t)>0,\ |g(t)|<1,\ f(0)=1,\ g(0)=0.$$

このとき，

$$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2,\ \ q(t)=\log\frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく．

(1) $p'(t)$ を求めよ．

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)$ を求めよ．

(4) $f(T)=g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))\ (0\leqq t\leqq T)$ の長さを求めよ．

【解答例】

以下，$f(t)=f$，$f'(t)=f'$ などとも表す．

(1) $p(t)=f^2+g^2$ の両辺を t で微分し

$$\begin{aligned}&p'(t)\\&=2ff'+2gg'\\&=2f(-fg)+2gf^2\quad(f'=-fg,\ g'=f^2\ より)\\&=0\end{aligned}$$ 答

(2) $q(t)=\log(1+g)-\log(1-g)$ より

$$q'(t)=\frac{g'}{1+g}-\frac{-g'}{1-g}=\frac{g'(1-g+1+g)}{(1+g)(1-g)}=\frac{2g'}{1-g^2}.$$

(1) より $p'(t)=0$ であり，これと $p(0)=1$ から

$p(t)=1$　つまり　$f^2+g^2=1$. ……①

これより $1-g^2=f^2$ であり，また $g'=f^2$ から

$$q'(t)=\frac{2f^2}{f^2}=2$$ 終

(3) $$q(0)=\log\frac{1+g(0)}{1-g(0)}=\log\frac{1}{1}=0$$

および (2) から

$q=2t$.

これを変形し

$$\log\frac{1+g}{1-g}=2t$$

$$\frac{1+g}{1-g}=e^{2t}$$

$$g=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$ ……②

よって

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$ 答

(4) ①，② から

$$f^2=1-g^2=1-\frac{(e^{2t}-1)^2}{(e^{2t}+1)^2}=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2},$$

$$f=\frac{2e^t}{e^{2t}+1}.\ (f>0\ より)$$

$f(T)=g(T)$ を解くと

$$\frac{2e^T}{e^{2T}+1}=\frac{e^{2T}-1}{e^{2T}+1}$$

$$e^{2T}-2e^T-1=0$$

$$(e^T-1)^2=2$$

$$e^T=1+\sqrt{2}\quad(T>0\ つまり\ e^T>1\ より)$$

$$T=\log(1+\sqrt{2}).$$

求める曲線の長さ L は

$$L=\int_0^T\sqrt{(f')^2+(g')^2}\,dt$$

であり，

$$\begin{aligned}&(f')^2+(g')^2\\&=(-fg)^2+(f^2)^2\quad(f'=-fg,\ g'=f^2\ より)\\&=f^2(g^2+f^2)\\&=f^2.\quad(①\ より)\end{aligned}$$

さらに $f>0$ から

$$\sqrt{(f')^2+(g')^2}=f$$

より

$$L=\int_0^T\frac{2e^t}{1+e^{2t}}dt.$$

ここで $e^t=u$ とすると $e^tdt=du$ から

$$L=\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{2}{1+u^2}du.$$

t	0	$\to$	$\log(1+\sqrt{2})$
u	1	$\to$	$1+\sqrt{2}$

さらに $u=\tan\theta$ とすると $du=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であり，$\tan\dfrac{3}{8}\pi=1+\sqrt{2}$ に留意し

$$L=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}2\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

u	1	$\to$	$1+\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	$\frac{3}{8}\pi$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta$$

$$=2\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}=\frac{\pi}{4}$$ 答

【配点例】（60点）

(1)(計 5 点)

（ア）　$p'(t)=0$ に $\boxed{5\text{点}}$

(2)(計 10 点)

（イ）　$p(t)=1$ に $\boxed{5\text{点}}$

（ウ）　$q'(t)=2$ に $\boxed{5\text{点}}$

(3)(計 20 点)

（エ）　$q(0)=0$ に $\boxed{5\text{点}}$

（オ）　$q(t)=2t$ に $\boxed{5\text{点}}$

（カ）　$g(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$ に $\boxed{10\text{点}}$

(4)(計 25 点)

（キ）　$f(t)=\dfrac{2e^{t}}{e^{2t}+1}$ に $\boxed{10\text{点}}$

（ク）　$T=\log(1+\sqrt{2})$ に $\boxed{5\text{点}}$

（ケ）　$\tan\dfrac{3}{8}\pi=1+\sqrt{2}$ に $\boxed{5\text{点}}$

（コ）　結論 $\dfrac{\pi}{4}$ に $\boxed{5\text{点}}$

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

3

xy 平面上に，点 A$(a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，C$(-a,\ 0)$（ただし $0<a<b$）をとる．点 A，B を通る直線を ℓ とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする．さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする．以下，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする．

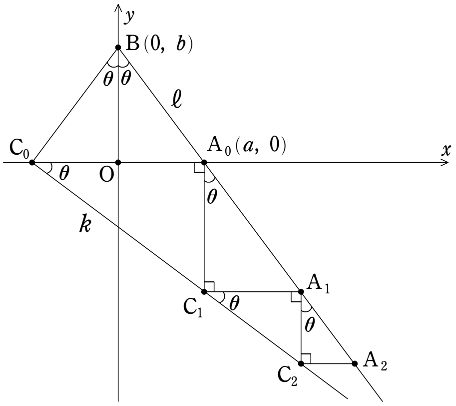
(1)　点 A_n，C_n の座標を求めよ．

(2)　$\triangle \mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ．

【解答例】

(1)　$\mathrm{A}=\mathrm{A}_0$，$\mathrm{C}=\mathrm{C}_0$ と表す．



$\angle \mathrm{A}_0\mathrm{BO}=\theta$ とすると，$k=0,\ 1,\ \cdots$ において

$$\angle \mathrm{C}_k\mathrm{A}_k\mathrm{C}_{k+1}=\angle \mathrm{A}_k\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{A}_{k+1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\angle \mathrm{A}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_{k+1}=\angle \mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_k\mathrm{C}_{k+1}=\theta$$

から，$\tan\theta=t$ とすると

$$\mathrm{C}_0\mathrm{A}_0=2a,\quad \mathrm{A}_0\mathrm{C}_1=2at,$$

$$\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1=2at^2,\quad \mathrm{A}_1\mathrm{C}_2=2at^3,$$

$$\mathrm{C}_2\mathrm{A}_2=2at^4,\quad \mathrm{A}_2\mathrm{C}_3=2at^5,$$

以下同様に

$$\mathrm{C}_k\mathrm{A}_k=2at^{2k},\quad \mathrm{A}_k\mathrm{C}_{k+1}=2at^{2k+1}.$$

よって C_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とすると

$$\begin{aligned}x_n&=-a+(2a+2at^2+\cdots+2at^{2n-2})\\&=-a+2a\cdot\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}\\&=\frac{2ab^2}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}-a\\&=\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}-\frac{2a^{2n+1}}{b^{2n-2}(b^2-a^2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_n&=-(2at+2at^3+\cdots+2at^{2n-1})\\&=-2at\cdot\frac{1-t^{2n}}{1-t^2}\\&=\frac{-2a^2b}{b^2-a^2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right\}\\&=-\frac{2a^2b}{b^2-a^2}+\frac{2a^{2n+2}}{b^{2n-1}(b^2-a^2)}.\end{aligned}$$

よって C_n の座標は

$$\left(\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}-\frac{2a^{2n+1}}{b^{2n-2}(b^2-a^2)},\ -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}+\frac{2a^{2n+2}}{b^{2n-1}(b^2-a^2)}\right)$$ 答

また A_n の座標は $(x_{n+1},\ y_n)$ に等しいので

$$\left(\frac{a(a^2+b^2)}{b^2-a^2}-\frac{2a^{2n+3}}{b^{2n}(b^2-a^2)},\ -\frac{2a^2b}{b^2-a^2}+\frac{2a^{2n+2}}{b^{2n-1}(b^2-a^2)}\right)$$ 答

(2)

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\mathrm{A}_0\mathrm{C}_0(b-y_n)\\&=\frac{1}{2}\cdot 2a(b-y_n)\\&=a\left\{b+\frac{2a^2b}{b^2-a^2}-\frac{2a^{2n+2}}{b^{2n-1}(b^2-a^2)}\right\}\\&=\frac{ab(a^2+b^2)}{b^2-a^2}-\frac{2a^{2n+3}}{b^{2n-1}(b^2-a^2)}\end{aligned}$$ 答

(3)　$\mathrm{BC}_0=\mathrm{BA}_0$ から

$$\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BA}_0}=\frac{\triangle \mathrm{CBA}_n}{\triangle \mathrm{CBA}_0}=\frac{S_n}{S_0}$$

が成り立ち，

$$S_0=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=ab,$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{ab(a^2+b^2)}{b^2-a^2}\quad\left(\left|\frac{a}{b}\right|<1 \text{ から}\right)$$

ゆえ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}=\frac{\dfrac{ab(a^2+b^2)}{b^2-a^2}}{ab}=\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$$ 答

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

参考

(1) では，x_n の漸化式を作る方法も有力です．

$\mathrm{C}_n\,(x_n,\ y_n)$ は直線 $k: y=-\dfrac{a}{b}(x+a)$ 上にあるので

$$y_n=-\frac{a}{b}(x_n+a).$$

$\mathrm{A}_n\,(x_{n+1},\ y_n)$ は直線 $\ell: y=-\dfrac{b}{a}x+b$ 上にあるので

$$-\frac{a}{b}(x_n+a)=-\frac{b}{a}x_{n+1}+b$$

を整理し

$$x_{n+1}=\frac{a^2}{b^2}x_n+\frac{a(a^2+b^2)}{b^2}$$

です．

参考

図を書くことで，A_n で $n\to\infty$ としたときの極限点は，ℓ と k の交点であることが予想できます．これを使うと，(3) の結論だけは出せます．

【配点例】(60点)

(1)(計 30 点)

（ア）　$x_n=-a+(2a+2at^2+\cdots+2at^{2n-2})$

または $x_{n+1}=\dfrac{a^2}{b^2}x_n+\dfrac{a(a^2+b^2)}{b^2}$

に相当する部分に $\boxed{10\text{点}}$

（イ）　C_n の座標に $\boxed{10\text{点}}$

（ウ）　A_n の座標に $\boxed{10\text{点}}$

(2)(計 10 点)

（エ）　S_n に $\boxed{10\text{点}}$

(3)(計 20 点)

（オ）　結論に $\boxed{20\text{点}}$．ただし，(1)，(2) が解けていないのに結論が出ている場合は $\boxed{10\text{点}}$．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

4

n を正の整数とし，$C_1, \cdots, C_n$ を n 枚の硬貨とする．各 $k=1, \cdots, n$ に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1-p_k$ とする．この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える．

(1)　$p_k=\dfrac{1}{3}$ $(k=1, \cdots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ．

(2)　$p_k=\dfrac{1}{2(k+1)}$ $(k=1, \cdots, n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ．

(3)　$n=3m$（m は正の整数）で，$k=1, \cdots, 3m$ に対して

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{1}{3m} & (k=1, \cdots, m)\\ \dfrac{2}{3m} & (k=m+1, \cdots, 2m)\\ \dfrac{1}{m} & (k=2m+1, \cdots, 3m)\end{cases}$$

とする．このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} Z_{3m}$ を求めよ．

【解答例】

一般の p_k についてのゲームの成功確率を W_n とする．硬貨 $C_1, \cdots, C_{k-1}$ の表の枚数で判断したゲームの成功・不成功から，硬貨 C_k の表裏によって決まるゲームの成功・不成功を考えると，$k=2, 3, \cdots$ のとき

$$W_k=(1-p_k)W_{k-1}+p_k(1-W_{k-1}) \quad \text{より}$$
$$W_k=(1-2p_k)W_{k-1}+p_k$$
$$W_k-\frac{1}{2}=(1-2p_k)\left(W_{k-1}-\frac{1}{2}\right). \qquad \cdots\cdots (*)$$

$W_0=0$ と定義すると，$(*)$ は $k=1$ でも成り立つ．

(1)　$X_0=0$ と定義すると，$(*)$ および

$$1-2p_k=\frac{1}{3}$$

から

$$X_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(X_0-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{より}$$
$$X_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \quad \text{答}$$

(2)　$Y_0=0$ と定義すると，$(*)$ および

$$1-2p_k=1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

から

$$Y_k-\frac{1}{2}=\frac{k}{k+1}\left(Y_{k-1}-\frac{1}{2}\right) \quad \text{より}$$
$$Y_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\left(Y_0-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{2(n+1)}$$
$$Y_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{答}$$

(3)　$k=1, \cdots, m$ のとき $1-2p_k=1-\dfrac{2}{3m}$,

$k=m+1, \cdots, 2m$ のとき $1-2p_k=1-\dfrac{4}{3m}$,

$k=2m+1, \cdots, 3m$ のとき $1-2p_k=1-\dfrac{2}{m}$

から，$Z_0=0$ と定義すると (1) と同様に

$$Z_{3m}-\frac{1}{2}$$
$$=\left(1-\frac{2}{3m}\right)^m\left(1-\frac{4}{3m}\right)^m\left(1-\frac{2}{m}\right)^m\left(Z_0-\frac{1}{2}\right).$$

ここで，自然数 m と実数 α に対し

$$\left(1-\frac{\alpha}{m}\right)^m=\left[\left\{1+\left(-\frac{\alpha}{m}\right)\right\}^{-\frac{m}{\alpha}}\right]^{-\alpha}$$

が恒等的に成り立つことと $\displaystyle\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ から

$$\lim_{x\to\infty} Z_{3m}=e^{-\frac{2}{3}}\cdot e^{-\frac{4}{3}}\cdot e^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(1-e^{-4}) \quad \text{答}$$

参考

漸化式を解かずに確率を求めることが可能です．

$q_k=1-p_k$ とすると，例えば $n=3$ について

$$1^3=(p_1+q_1)(p_2+q_2)(p_3+q_3)$$
$$= \ p_1p_2p_3+p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3$$
$$+p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3+q_1q_2q_3,$$
$$(q_1-p_1)(q_2-p_2)(q_3-p_3)$$
$$=-(p_1p_2p_3+p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3)$$
$$+p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3+q_1q_2q_3,$$
$$p_1p_2p_3+p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3=W_3$$

より

$$1-(q_1-p_1)(q_2-p_2)(q_3-p_3)=2W_3 \quad \text{から}$$
$$W_3=\frac{1}{2}\{1-(q_1-p_1)(q_2-p_2)(q_3-p_3)\}$$

です．

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

【配点例】（60点）

(1)(計 20 点)

（ア） 漸化式またはそれに相当する部分に $\boxed{10\text{点}}$

（イ） X_n に $\boxed{10\text{点}}$

(2)(計 20 点)

（ウ） $(*)$ の変形またはそれに相当する部分に $\boxed{10\text{点}}$

（エ） Y_n に $\boxed{10\text{点}}$

(3)(計 20 点)

（オ） Z_{3m} に $\boxed{10\text{点}}$.

（カ） $\lim\limits_{m\to\infty} Z_{3m}$ に $\boxed{10\text{点}}$.

※ 東工大は解答や詳細の配点は発表していません．解答例と配点例は，STEP が独自に作成したものです．

5

整数の組 $(a,\ b)$ に対して 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える．方程式 $f(x)=0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n=1$ となる正の整数 n が存在するような組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

注意

「方程式 $f(x)=0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n=1$ となる正の整数 n が存在する」という文が，解釈が 2 通り可能です．つまり，
$f(x)=0$ の解が α_1，α_2 だとして

(A)「${\alpha_1}^n=1$ かつ ${\alpha_2}^n=1$ となる自然数 n が存在する」と，

(B)「${\alpha_1}^{n_1}=1$ なる自然数 n_1 が存在し，かつ ${\alpha_2}^{n_2}=1$ となる自然数 n_2 が存在する」

です．この問題に対してはどちらでも結論は同じなのですが，途中の議論が若干異なります．
両方の解釈で解答しておきます．

【解答例 (a) の解釈】

$f(x)$ は実数係数なので，$f(x)=0$ は

[1]　実数解のみを持つ，

[2]　共役な虚数解を持つ

のいずれかであり，どちらにせよ

$$\alpha^n=1 \Longrightarrow |\alpha|=1$$

[1] のとき

α は実数より

$$|\alpha|=1 \Longleftrightarrow \alpha=\pm 1$$

であり，$(+1)^2=(-1)^2=1$ であるから，$f(x)=0$ の解が $\{-1,\ -1\}$，$\{-1,\ 1\}$，$\{1,\ 1\}$ のときに限り題意を満たし，このとき解と係数の関係より

$$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (0,\ -1),\ (-2,\ 1)$$

[2] のとき

$f(x)=0$ の 2 解を α，$\overline{\alpha}$（α は虚数）とすると，

$$\alpha^n=1 \Longrightarrow |\alpha|=1$$
$$\Longleftrightarrow |\alpha|^2=1$$
$$\Longleftrightarrow \alpha\overline{\alpha}=1$$

であるから，解と係数の関係より $b=1$．

また $f(x)=0$ の判別式<0 より

$$a^2-4b<0 \quad \text{から}$$
$$a^2-4<0.$$

a は整数より

$$a=-1,\ 0,\ 1.$$

$a=-1$ のとき

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3},$$

$a=0$ のとき

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\cos\frac{\pi}{2}\pm i\sin\frac{\pi}{2},$$

$a=1$ のとき

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\cos\frac{2}{3}\pi\pm i\sin\frac{2}{3}\pi$$

であり，これらのどの解に対しても

$$x^{12}=1$$

が成り立つので，題意を満たす．

以上より，求める $(a,\ b)$ の組は

$$(a,\ b)=(-2,\ 1),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (1,\ 1),\ (2,\ 1)$$ 答

【解答例 (b) の解釈】

$f(x)$ は実数係数なので，$f(x)=0$ は

[1]　実数解のみを持つ，

[2]　共役な虚数解を持つ

のいずれかである．

[1] のとき

α が実数のとき，

$\alpha^n=1$ なる自然数 n が存在する $\Leftrightarrow \alpha=\pm1$

であるから，題意を満たすのは $f(x)=0$ の解が

$\{-1,\ -1\}$，$\{-1,\ 1\}$，$\{1,\ 1\}$

のときに限り，解と係数の関係から

$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (0,\ -1),\ (-2,\ 1)$

[2] のとき

$f(x)=0$ の 2 解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ (α は虚数) とすると，

$$\alpha^n=1 \Longrightarrow |\alpha|=1$$
$$\Leftrightarrow |\alpha|^2=1$$
$$\Leftrightarrow \alpha\overline{\alpha}=1$$

であるから，解と係数の関係より $b=1$．

また $f(x)=0$ の判別式<0 より

$a^2-4b<0$　から

$a^2-4<0$．

a は整数より

$a=-1,\ 0,\ 1$．

$a=-1$ のとき

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

であり，

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6=1$$

より題意を満たす．

$a=0$ のとき

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm i$$

であり，

$$(\pm i)^4=1$$

より題意を満たす．

$a=1$ のとき

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\cos\frac{2}{3}\pi\pm i\sin\frac{2}{3}\pi$$

であり，

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=1$$

より題意を満たす．

以上より，求める $(a,\ b)$ の組は

$(a,\ b)=(-2,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$，

$(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$　答

【配点例】(60点)

◇実数解についての検討 (計 25 点)

(ア)　解が -1 または 1 のみであることに $\boxed{10\text{点}}$

(イ)　$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (0,\ -1),\ (-2,\ 1)$ について

(正しい組の数－誤った組の個数)× $\boxed{5\text{点}}$

ただしマイナスの点数にはしない．

◇虚数解についての検討 (計 35 点)

(ウ)　$b=1$ に $\boxed{10\text{点}}$

(エ)　$a=-1,\ 0,\ 1$ に $\boxed{10\text{点}}$

(オ)　$(a,\ b)=(-1,\ 1)$ が適することに $\boxed{5\text{点}}$

(カ)　$(a,\ b)=(0,\ 1)$ が適することに $\boxed{5\text{点}}$

(キ)　$(a,\ b)=(1,\ 1)$ が適することに $\boxed{5\text{点}}$